Soluzioni Prova 1

Esercizio 1 a) Calcolare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & k \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ al variare del parametro k.

b) Discutere le soluzioni del sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + kz = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ al variare del parametro k.

Soluzione. a) $k = 3$. b) *Per* $k \neq 3$ *soluzione unica, per* $k = 3$ *si hanno* ∞^1 *soluzioni.*

Esercizio 2 Siano v_1, v_2, v_3, w_1, w_2 vettori non nulli di $\mathbf{R}^4$, e si ponga $E = L[v_1, v_2, v_3]$, $F = L[w_1, w_2]$.

a) Dimostrare che, se $E \subseteq F$, allora v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti. Se $E \subseteq F$, quali valori può assumere $\dim E$?

b) Supponiamo ora che (v_1, v_2, v_3) sia una base di E e (w_1, w_2) sia una base di F. Determinare: $\dim E^\perp, \dim F$ e stabilire se $\mathbf{R}^4 = E^\perp + F$.

Soluzione. a) $\dim E = 1, 2$. b) *Si ha* $\dim E = 3, \dim F = 2$, *dunque* $\dim E^\perp = 1$ *e* $\mathbf{R}^4 \neq E^\perp + F$.

Esercizio 3 Dati i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, sia E il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato da v_1, v_2 e F il sottospazio di equazione $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$.

a) Calcolare la dimensione di F, e la dimensione di E al variare di k.

b) Per quali valori di k il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ appartiene a E?

c) Per quali valori di k si ha $E \subseteq F$?

d) Quali valori può assumere $\dim(E \cap F)$?

Soluzione. a) $\dim F = 3$, $\dim E = 2$ *per ogni* k.

b) *Per* $k = -1$ *il vettore dato è somma dei generatori.*

c) *Unico valore* $k = 2$*: il primo generatore appartiene a* F*; il secondo sta in* F *per* $k = 2$.

d) *Per* $k = 2$ *si ha* $\dim(E \cap F) = 2$*, altrimenti la dimensione è* 1*. Infatti,* $\dim(E \cap F) = 2$ *se e solo se* $E \subseteq F$*, cioè se e solo se* $k = 2$.

Esercizio 4 Nel piano sono dati i punti $O = (0, 0), A = (2, 4)$.

a) Determinare le equazioni delle circonferenze di raggio 5 passanti per O e A.

b) Determinare l'equazione della circonferenza γ di raggio minimo passante per O e A.

c) Determinare i punti P sulla circonferenza γ trovata al punto b), tali che il triangolo di vertici O, A, P abbia area massima.

Soluzione. a) *Asse* r *di* OA *ha equazione* $x+2y-5 = 0$. $C = (-2t+5, t)$ *sta su* r *e ha distanza* 5 *da* O*. Si trova* $t = 0$ *e* $t = 4$ *da cui i centri* $C_1 = (5, 0)$ *e* $C_2 = (-3, 4)$*. Otteniamo*

$$\gamma_1 : (x - 5)^2 + y^2 = 25, \quad \gamma_2 : (x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25.$$

b) *Il centro coincide con il punto medio di* OA*, da cui*

$$\gamma : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5.$$

c) *I punti cercati sono dati dalle intersezioni di* γ *con l'asse di* OA*. Troviamo* $P_1 = (-1, 3), P_2 = (3, 1)$.

Esercizio 5 Nello spazio sono dati: il punto $A = (1, 2, 0)$ e la retta r di equazioni parametriche
$r : \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 2 - t \end{cases}$. Determinare:

a) L'equazione del piano π contenente A e r.

b) L'equazione del piano π' passante per A e ortogonale e r.

c) L'equazione del piano π'' parallelo a r e contenente l'origine e il punto A.

d) Determinare infine un punto P sulla retta r tale che il triangolo di vertici O, A, P sia rettangolo in O.

Soluzione. a) $\pi : 2x + y + z - 4 = 0$.

b) $\pi' : x - y - z + 1 = 0$.

c) $\pi" : 2x - y + 3z = 0$.

d) $\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP} \rangle = 0$ *per* $t = 4$ *da cui l'unico punto* $P = (4, -2, -2)$.

Esercizio 6 Sia f l'unico endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ tale che:

$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 - e_2 \\ f(e_2) = e_1 - e_2 \\ f(e_3) = 2e_1 - 2e_2 \end{cases}$$

dove (e_1, e_2, e_3) è la base canonica di $\mathbf{R}^3$.

a) Determinare il polinomio caratteristico di f.

b) Stabilire se f è diagonalizzabile oppure no.

c) Determinare gli eventuali valori di k per i quali il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ k \\ k+2 \end{pmatrix}$ appartiene all'immagine di f.

Soluzione. a) $p(x) = -x^3$. b) *Non diagonalizzabile.* c) $k = -2$.