Soluzioni prova 2

Esercizio 1 Sono dati i vettori v_1, v_2, w_1, w_2 di $\mathbf{R}^6$, che supporremo linearmente indipendenti, e si ponga $E = L[v_1, v_2], F = L[w_1, w_2]$.

a) Dimostrare che $E \cap F = \{O\}$.

b) Quali valori può assumere la dimensione del sottospazio $(E + F)^{\perp}$?

Soluzione. b) *Unico valore* 2.

Esercizio 2 In $\mathbf{R}^4$ è dato il sottospazio E generato dai vettori $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) Determinare una base ortonormale di E.

b) Determinare una base di $E^{\perp}$.

c) Determinare equazioni cartesiane di E.

Soluzione. a) $u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) *Si ha* $E^{\perp} = \begin{cases} -x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$ *da cui la base:* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) *Equazioni di* $E : \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$.

Esercizio 3 Sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare tale che: $\begin{cases} F(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ F(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ F(e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ dove (e_1, e_2, e_3) è la base canonica di $\mathbf{R}^3$. Determinare:

a) Una base di Ker$F$.

b) Un vettore $v \in \mathbf{R}^3$, ortogonale al vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e tale che $F(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Sia ora $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ un'applicazione lineare suriettiva. Dimostrare che $n \geq m$.

Soluzione. a) *Esplicitamente* $F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - z \\ x - y + z \end{pmatrix}$. *Base di* Ker$F$ *data da* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) *Vettore generico v tale che* $F(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t-1 \end{pmatrix}$. *Ora v è ortogonale a* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *se e solo se $t = -1$, quindi il vettore cercato è unico:*

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4 a) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, determinare una matrice ortogonale M e una matrice diagonale D tali che $D = M^t A M$.

b) Classificare la conica $\gamma : x^2 + y^2 + 4xy + 6x + 1 = 0$ determinandone una forma canonica.

c) Determinare le coordinate del centro e le equazioni degli assi di simmetria di γ.

Soluzione. a) *Autovalori* $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$. *Autospazi* $E(-1) : x + y = 0, E(3) : x - y = 0$. *Dunque*

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) *Matrice della conica* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *con parte principale* $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. *Poiché* $|A| = -12 \neq 0$ *la conica è generale, e poiché* $|Q| = -3 < 0$ *è un'iperbole. Gli autovalori sono* $-1, 3$ *dunque la forma canonica è del tipo:*

$$-X^2 + 3Y^2 + p = 0 \quad \textit{con matrice} \quad A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

Dal teorema di invarianza $|A| = |A'|$ *otteniamo* $p = 4$ *e la forma canonica è* $-X^2 + 3Y^2 + 4 = 0$.

d) *Per* $k \neq 1$ *iperbole generale, per* $k = 1$ *iperbole degenere (coppia di rette incidenti).*

Esercizio 5 Nello spazio sono dati la retta $r : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$ e il piano $\pi : x + 2y - z = 0$. Determinare:

a) Il punto d'intersezione tra r e π.

b) Equazioni cartesiane della retta r_1, proiezione ortogonale di r su π.

c) Equazioni cartesiane della retta r_2, contenuta in π, perpendicolare e incidente alla retta r.

d) L'equazione della sfera tangente al piano π e avente centro nel punto $C = (0, 3, 0)$.

Soluzione. a) $(1, 1, 3)$. *Notiamo che* r *ha parametri direttori* $(1, -1, 1)$ *ed equazioni parametriche* $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$. *Passa anche per* $(2, 0, 4)$.

b) *Il fascio di piani di asse* r *ha equazione* $(1+k)x + y - kz - 2 + 2k = 0$ *ed è perpendicolare a* π *se* $k = -3/2$. *Dunque* $r_1 : \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - 2y - 3z + 10 = 0 \end{cases}$. r_1 *passa per* $(1, 1, 3)$ *e ha parametri direttori* $(4, -1, 2)$.

c) *La retta cercata passa per* $(1, 1, 3)$. *Essa è data dall'intersezione di* π *con il piano passante per* $(1, 1, 3)$ *perpendicolare alla proiezione ortogonale* r_1 *di* r *su* π. *Tale piano ha equazione* $\pi' : 4(x - 1) - (y - 1) + 2(z - 3) = 0$ *ovvero* $4x - y + 2z - 9 = 0$. *Dunque:*

$$r_2 : \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 4x - y + 2z - 9 = 0 \end{cases}$$

e r_2 *passa per* $(1, 1, 3)$ *e ha parametri direttori* $(1, -2, -3)$.

d) *Il raggio vale la distanza di C da π, cioè $\sqrt{6}$. L'equazione è dunque*

$$x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 6.$$

Esercizio 6 È data la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & k \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, dipendente dal parametro k, e il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Determinare i valori di k per i quali:

a) Il sistema lineare $AX = v$ è compatibile.

b) La matrice A è diagonalizzabile.

c) La matrice AA^t è diagonalizzabile.

Soluzione. a) *Si vede subito che $|A| = 0$ se e solo se $k = 3$. Dunque se $k \neq 3$ il sistema ammette una e una sola soluzione, mentre si vede che per $k = 3$ è incompatibile.*

b) *Il polinomio caratteristico è $p(x) = x^2 - 4x + 3 - k$: dunque la matrice ammette due autovalori reali e distinti per $k > -1$, l' autovalore 2 di MA due e MG uno per $k = -1$, e autovalori complessi per $k < -1$. Dunque A è diagonalizzabile se e solo se $k > -1$.*

c) *Sempre diagonalizzabile.*