Geometria Differenziale: Parte 1

A. Savo

Indice delle sezioni

1 Curve piane

Generalmente, per *curva piana* si intende *un insieme di livello di una funzione di due variabili.*

Ad esempio, se la funzione è $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $c > 0$, allora l'insieme di livello

$$f^{-1}(c) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = c\}$$

è la circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{c}$. Diremo anche che

$$x^2 + y^2 = c$$

è l'equazione cartesiana della curva.

In Geometria Differenziale siamo interessati alle proprieta' geometriche di una curva in quanto insieme di punti; spesso pero' occorre parametrizzare la curva in questione, e interpretare la curva stessa come *traiettoria percorsa da un punto mobile sul piano, descritta da equazioni parametriche.* Parleremo allora di *curva parametrizzata.*

Ad esempio, la circonferenza di cui sopra è la traiettoria descritta da un punto che si muove nel piano con equazioni del tipo

$$\begin{cases} x = \sqrt{c}\cos t \\ y = \sqrt{c}\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

al variare del tempo (parametro) t. Dunque la curva di livello è descritta come immagine (o *traccia*) dell'applicazione $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$ definita da

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{c}\cos t \\ \sqrt{c}\sin t \end{pmatrix}.$$

• Nel seguito, il termine *differenziabile* indica *differenziabile di classe C^∞*. Per brevità un'applicazione (o funzione) è sempre intesa come applicazione (o funzione) differenziabile, a meno che non sia diversamente indicato nel testo.

Definizione. *Una* curva parametrizzata *è un' applicazione $\alpha : I \to \mathbf{R}^2$ di classe C^∞ definita su un intervallo I di $\mathbf{R}$. Quindi*

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

dove $x(t), y(t)$ sono funzioni differenziabili di $t \in I$. Il vettore

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

è detto vettore velocità *(o* vettore tangente*) della curva in $t \in \mathbf{R}$. L'insieme di punti*

$$\{\alpha(t) \in \mathbf{R}^2 : t \in I\}$$

è detto traccia *della curva α.*

Spesso chiameremo $\alpha(t)$, nell'intervallo specificato, anche *arco di curva* (parametrizzato). L'intervallo I potrebbe essere anche illimitato, ad esempio $I = [a, \infty)$, o addirittura tutto $\mathbf{R}$. Spesso scriveremo anche

$$\alpha(t) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in I.$$

Definizione. *Un arco di curva parametrizzato $\alpha : I \to \mathbf{R}^2$ è detto* regolare *in t_0 se $\alpha'(t_0) \neq 0$. Se $\alpha'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$ diremo che α è* regolare.

Le curve regolari hanno dunque vettore tangente in ogni loro punto, e hanno traccia "liscia"; sono le curve che studieremo principalmente nel corso.

1.1 Esempi

Rette. La curva:

$$\alpha : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \end{cases} \quad t \in [0, 3]$$

parametrizza il segmento di retta che unisce $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$; la sua traccia è dunque tale segmento, e giace sulla retta di equazione $x - 2y - 5 = 0$.

In generale, se le componenti sono equazioni lineari di t:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases} \quad t \in I$$

dove $x_0, y_0, l, m \in \mathbf{R}$, allora il vettore velocità è costante: $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$; se l ed m non sono entrambi nulli la traccia sarà sempre un segmento di retta, e la curva è ovviamente regolare.

Circonferenze. La curva parametrizzata:

$$\alpha : \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

ha come traccia la circonferenza di centro l'origine e raggio R, di equazione cartesiana $x^2 + y^2 = R^2$ (come abbiamo già visto). Il vettore velocità :

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \end{pmatrix}$$

ha norma costante, uguale a $R > 0$, dunque la curva è regolare.

Curva non regolare. La curva parametrizzata:

$$\alpha : \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}$$

ha vettore velocità

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$$

che si annulla se e solo se $t = 0$, dunque α non è regolare in $t = 0$. Ogni arco di curva

$$\beta : \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

tale che $0 \notin [a, b]$, è regolare.

In effetti, la traccia di α ha equazione cartesiana $x^2 - y^3 = 0$, che ha una singolarità (cuspide) nell'origine: in tale punto, non è possibile tracciare la retta tangente.

- La traccia di una curva parametrizzata regolare può avere autointersezioni: se

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 4t \\ t^2 - 4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$$

allora

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 - 4 \\ 2t \end{pmatrix}$$

e si vede che $\alpha'(t)$ non è mai il vettore nullo; pero' notiamo che

$$\alpha(2) = \alpha(-2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dunque la traccia si autointerseca nell'origine. Questo accade perché α non è *iniettiva.*

2 Curve di livello

Data la funzione $f(x, y)$, e dato $c \in \mathbf{R}$, l'insieme

$$f^{-1}(c) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = c \right\}$$

è detto *insieme di livello* o *curva di livello* di f. Diremo anche che la curva di livello ha equazione $f(x, y) = c$. *Parametrizzare* $f^{-1}(c)$ (o un sottoinsieme Γ di esso) significa trovare (se possibile) una curva parametrizzata α la cui traccia coincide con Γ.

Esempio. Se $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $c > 0$, allora l'insieme di livello $f^{-1}(c)$ ha equazione cartesiana $x^2 + y^2 = c$; esso è una circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{c}$, che si parametrizza, ad esempio:

$$\begin{cases} x = \sqrt{c}\cos t \\ y = \sqrt{c}\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Ha interesse trovare, se possibile, una parametrizzazione *regolare* di una data curva di livello; daremo ora una condizione sufficiente affinché ciò accada.

Per iniziare, supponiamo che l'insieme di livello sia il *il grafico di una funzione differenziabile* $g(x)$ su un dato intervallo $[a, b]$, sia cioè l'insieme:

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : y = g(x), x \in [a, b] \right\}.$$

Notiamo che $\Gamma = f^{-1}(0)$ dove $f(x, y) = y - g(x)$. Osserviamo che Γ ammette questa parametrizzazione:

$$\alpha : \begin{cases} x = t \\ y = g(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b].$$

Dunque il vettore velocità

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ g'(t) \end{pmatrix}$$

non è mai nullo, e di conseguenza la parametrizzazione è regolare. Tutto quello che abbiamo detto si estende (con ovvi cambiamenti) al caso in cui l'insieme di livello sia il grafico di una funzione della variabile y. In conclusione:

Teorema 1. *Il grafico di una funzione differenziabile di una variabile si può sempre parametrizzare in modo regolare.*

Esempio. Il grafico di $y = x^2 + 1$ (che è una parabola), ammette la parametrizzazione regolare

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 + 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Veniamo ora al risultato generale. Data una funzione $f(x, y)$ che sia C^1 su un dominio di $\mathbf{R}^2$ (eventualmente, su tutto il piano), ricordiamo che il *gradiente* di f in (x, y) è il vettore:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$$

avente come componenti le derivate parziali della funzione f. Un punto P è detto *critico* se il gradiente in tal punto è il vettore nullo, *regolare* se non è critico. Un numero reale c si dice *valore regolare* di f se $f^{-1}(c)$ non contiene punti critici di f.
Vale il seguente risultato.

Teorema 2. *Sia $f(x, y)$ una funzione C^1 e sia $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un suo punto regolare. Supponiamo che $f(x_0, y_0) = c$. Allora esiste un intorno U di P_0 tale che la curva di livello $f^{-1}(c) \cap U$ può essere parametrizzata in modo regolare, ed è la traccia di un arco di curva regolare*

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to U \subseteq \mathbf{R}^2$$

per qualche $\epsilon > 0$. In altre parole,

$$f(\alpha(t)) = c$$

per ogni $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Si ha inoltre che il vettore $\nabla f(\alpha(t))$, gradiente di f nel punto $\alpha(t)$, è sempre ortogonale alla curva di livello, nel senso che

$$\langle \nabla f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle = 0$$

per ogni $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Detto in breve, l'insieme di livello è "liscio" in un intorno di un qualunque punto regolare, e il gradiente è sempre ortogonale alla curva di livello.

Dimostrazione. Già sappiamo che la conclusione è vera se $f(x, y)$ è del tipo

$$f(x, y) = y - g(x)$$

dove $g(x)$ è una funzione differenziabile di x. Infatti, in tal caso, l'insieme di livello $f^{-1}(c)$ coincide con il grafico della funzione $y = g(x) + c$, che si parametrizza, come abbiamo visto, in questo modo:

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t \\ g(t) + c \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ g'(t) \end{pmatrix}$$

che risulta essere sempre diverso dal vettore nullo. Dunque $\alpha(t)$ è regolare. Analoghe considerazioni si possono fare se $f(x, y)$ è del tipo $f(x, y) = x - h(y)$.

Ora, per un noto teorema di Analisi (detto *teorema della funzione implicita*) in un intorno di un punto regolare possiamo sempre esprimere l'insieme di livello come grafico di una funzione di una sola variabile (precisamente, come grafico di una funzione di x, se $f_y(P_0) \neq 0$, e come grafico di una funzione della variabile y se $f_x(P_0) \neq 0$). Questo dimostra la prima parte del teorema. Sia ora

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad t \in (-\epsilon, \epsilon)$$

una parametrizzazione regolare di $f^{-1}(c)$ vicino a un dato punto regolare P_0. Allora si ha

$$f(x(t), y(t)) = c$$

per ogni $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Consideriamo la funzione

$$\psi(t) = f(x(t), y(t))$$

allora necessariamente $\psi'(t) = 0$ per ogni $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Per la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$0 = \psi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \langle \nabla f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle$$

da cui l'asserto. $\square$

Retta tangente. Se $p_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ è un punto regolare della curva di livello $\Gamma = f^{-1}(c)$, allora esiste la retta tangente a Γ in p_0: qual'è la sua equazione cartesiana ? Sapendo che il vettore gradiente nel punto p_0 è ortogonale a tale retta, otteniamo subito l'equazione:

$$f_x(p_0)(x - x_0) + f_y(p_0)(y - y_0) = 0.$$

Esempio. Sia Γ la curva di livello $x^2 - y^2 = 5$, e sia $p_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \Gamma$. L'equazione cartesiana della retta tangente a Γ in p_0 è:

$$6(x - 3) - 4(y - 2) = 0 \quad \text{ovvero} \quad 3x - 2y - 5 = 0.$$

Esercizio. Parametrizzare, in modo regolare, l'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Determinare il vettore velocità; calcolare i punti dove la norma del vettore velocità è massima (resp. minima).

Esempio. Studiamo le curve di livello della funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$. Il gradiente è dato da

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}.$$

L'unico punto critico è l'origine, e l'unico valore critico è $c = 0$. Le curve di livello $f(x, y) = c$ con $c \neq 0$ si possono dunque parametrizzare in modo regolare; tali curve sono iperboli generali. Se $c = 0$ l'insieme di livello è una coppia di rette incidenti; tale insieme è singolare nell'origine.

- Discutere gli insiemi di livello di $f(x, y) = x^2 - y^2 - 6x + 4y$.
- Discutere gli insiemi di livello di $f(x, y) = x^2 - y^3$. Poiché

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -3y^2 \end{pmatrix},$$

l'unico punto critico è l'origine: siccome $f(0, 0) = 0$, l'insieme di livello $f^{-1}(c)$ si può parametrizzare in modo regolare per ogni $c \neq 0$; in corrispondenza del valore critico $c = 0$ otteniamo l'insieme di livello $f^{-1}(0)$ avente equazione:

$$x^2 - y^3 = 0,$$

che ha una cuspide in corrispondenza del punto critico, e dunque non ha vettore tangente in quel punto. Per ogni punto P di $f^{-1}(0)$ diverso dall'origine avremo una parametrizzazione regolare di $f^{-1}(0)$ in un intorno sufficientemente piccolo di P. Notiamo infine che $f^{-1}(0)$ si identifica con il grafico della funzione

$$\phi(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

che in effetti è derivabile per tutti i valori di x meno che $x = 0$.

3 Lunghezza, ascissa curvilinea

Vogliamo ora definire la lunghezza di un arco di curva $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}^2$. Fissiamo una *partizione* $\mathcal{P}$ di $[a, b]$ (cioè un insieme di punti che dividono $[a, b]$ in sottointervalli):

$$\mathcal{P} = \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b\}$$

e denotiamo con

$$|\mathcal{P}| = \max_{i=1,\ldots,n} |t_i - t_{i-1}|$$

l'*ampiezza* della partizione. La lunghezza della poligonale individuata da P è data da

$$L_a^b(\alpha, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})|$$

L'intuizione suggerisce che la lunghezza dell'arco di curva è adeguatamente approssimata dalla lunghezza di una poligonale P quando la sua ampiezza $|\mathcal{P}|$ tende a zero. A sua volta, la definizione di integrale e il teorema del valore medio mostrano che, quando $|\mathcal{P}|$ è piccola, allora la lunghezza della poligonale è bene approssimata dall'integrale $\int_a^b |\alpha'(t)|\, dt$.

$$|\mathcal{P}| \to 0 \quad \text{implica} \quad L_a^b(\alpha, \mathcal{P}) \to L_a^b(\alpha) \doteq \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt.$$

In effetti, si ha il seguente teorema, che non dimostreremo.

Teorema 3. *Data una curva $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}^2$, e dato $\epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni partizione $\mathcal{P}$ di $[a, b]$ di ampiezza $|\mathcal{P}| < \delta$, si ha*

$$|L_a^b(\alpha) - L_a^b(\alpha, \mathcal{P})| < \epsilon.$$

Tutto ciò suggerisce la seguente

Definizione 4. *Dato un'arco di curva $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}^3$ definiamo la sua lunghezza come*

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt.$$

3.1 La lunghezza di un arco di curva è indipendente dalla parametrizzazione

Un *diffeomorfismo* ϕ tra gli intervalli $[c, d]$ e $[a, b]$ è una funzione differenziabile :

$$\phi : [c, d] \to [a, b]$$

con derivata prima mai nulla (quindi $\phi' > 0$ oppure $\phi' < 0$ per ogni punto di $[c, d]$). Quindi ϕ è biunivoca e ammette un unica funzione inversa $\phi^{-1} : [c, d] \to [a, b]$, che risulta, anch'essa, un diffeomorfismo.

• *Dato un arco di curva $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}^2$, e dato un diffeomorfismo $\phi : [c, d] \to [a, b]$, la curva*

$$\beta \doteq \alpha \circ \phi : [c, d] \to \mathbf{R}^2,$$

è detta riparametrizzazione di α.

È chiaro che α e $\alpha \circ \phi$ hanno la stessa immagine, quindi la stessa traccia; è anche chiaro che, se β è una riparametrizzazione di α, allora α è una riparametrizzazione di β.

• Si può pensare a una riparametrizzazione di una curva α come ad una curva con la stessa traiettoria, ma con "legge del moto" diversa.

Esempio. Si consideri la curva:

$$\alpha : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \end{cases} \quad t \in [0, 3]$$

che parametrizza il segmento di retta che unisce $(1,-2)$ e $(7,1)$. Sia

$$\phi : [1,2] \to [0,3]$$

la funzione definita da $\phi(t) = t^2 - 1$. Notiamo che, nell'intervallo di definizione $[1,2]$ si ha $\phi' > 0$, dunque ϕ è un diffeomorfismo. La curva $\beta = \alpha \circ \phi$:

$$\beta : \begin{cases} x = 2t^2 - 1 \\ y = t^2 - 3 \end{cases}, \quad t \in [1,2],$$

è dunque una riparametrizzazione di α, e ha per traccia lo stesso segmento di retta. Si noti che, mentre il vettore velocità di α ha componenti $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, e ha dunque norma $\sqrt{5}$ (costante), il vettore velocità di β ha componenti $\begin{pmatrix} 4t \\ 2t \end{pmatrix}$ che variano durante il moto, e ha norma $\sqrt{20}t$ nel dato intervallo.

Un *invariante geometrico* di una curva è una grandezza geometrica che non dipende dalla parametrizzazione della curva, ma solo dalla sua traccia (traiettoria). È naturale pensare che la lunghezza di un arco di curva sia un invariante geometrico.
In effetti, è facile dimostrare che è proprio cosi'.

Lemma 5. *La lunghezza di un arco di curva è indipendente dalla parametrizzazione. In altre parole, se $\alpha : [a,b] \to \mathbf{R}^2$ è una curva e $\beta : [c,d] \to \mathbf{R}^2$ è una riparametrizzazione di α, allora*

$$L_a^b(\alpha) = L_c^d(\beta).$$

Dimostrazione. Per ipotesi, si ha $\beta = \alpha \circ \phi$ per un diffeomeorfismo $\phi : [c,d] \to [a,b]$. Supponiamo che $\phi'(t) > 0$ per ogni t. Allora $\beta'(t) = \alpha'(\phi(t))\phi'(t)$ e quindi:

$$|\beta'(t)| = |\alpha'(\phi(t))|\phi'(t).$$

Ora:

$$\begin{aligned} L_c^d(\beta) &= \int_c^d |\beta'(t)|\, dt \\ &= \int_c^d |\alpha'(\phi(t))|\phi'(t) dt \end{aligned}$$

Con la sostituzione $u = \phi(t)$ nell'integrale a destra, otteniamo:

$$L_c^d(\beta) = \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} |\alpha'(u)|\, du = \int_a^b |\alpha'(u)|\, du = L_a^b(\beta).$$

Il secondo passaggio è giustificato dal fatto che ϕ è biunivoca, crescente, dunque $\phi(c) = a, \phi(d) = b$. Il caso in cui ϕ' sia negativa su $[c,d]$ si dimostra in modo simile.

□

Esempio. Consideriamo $\alpha : [0, \pi] \to \mathbf{R}^2$ e $\beta : [0, \pi/2] \to \mathbf{R}^2$ definite risp. da

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t), \quad \beta(t) = (\cos(2t), \sin(2t)).$$

Si vede subito che α e β hanno la stessa traccia: una semicirconferenza di raggio unitario. In effetti, β è una riparametrizzazione di α, poiché $\beta = \alpha \circ \phi$ dove $\phi : [0, \pi/2] \to [0, \pi]$ è il diffeomorfismo definito da $\phi(t) = 2t$. La lunghezza, in ciascun caso, è π.

3.2 Ascissa curvilinea

Dato un arco di curva $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ regolare, cosicché $\alpha'(t) \neq 0$ per ogni t, definiamo la funzione *ascissa curvilinea* con origine in a come la lunghezza dell'arco di curva definito da α da a a t:

$$s(t) = \int_a^t |\alpha'(u)| \, du.$$

Notiamo che $s(0) = 0$ e $s(b) = L \doteq L_a^b(\alpha)$, la lunghezza totale dell'arco. Poiché $s'(t) = |\alpha'(t)| > 0$ per ogni $t \in [a, b]$, la funzione s definisce un diffeomorfismo

$$s : [a, b] \to [0, L]$$

dove L è la lunghezza dell'arco. Detto $\phi = s^{-1} : [0, L] \to [a, b]$ l'inverso, riparametrizziamo la curva α tramite s^{-1}:

$$\bar{\alpha} \doteq \alpha \circ s^{-1}.$$

La curva $\bar{\alpha}$ ha la stessa traccia di α, ed è parametrizzata dall'ascissa curvilinea. Notiamo che $\bar{\alpha} \circ s = \alpha$, cioè:

$$\alpha(t) = \bar{\alpha}(s(t)), \quad \text{per ogni } t \in [a, b].$$

Dalla regola di derivazione delle funzioni composte otteniamo:

$$\alpha'(t) = \bar{\alpha}'(s(t)) \cdot s'(t)$$

dunque, prendendo la norma ad ambo i membri:

$$|\alpha'(t)| = |\bar{\alpha}'(s(t))| \cdot s'(t),$$

e tenendo conto del fatto che $s'(t) = |\alpha'(t)|$, otteniamo:

$$|\bar{\alpha}'(s)| = 1.$$

Dunque, il parametro è l'ascissa curvilinea se e solo se il vettore velocità ha norma unitaria per ogni valore di s. In conclusione:

Proposizione 6. *Ogni curva regolare $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}^2$ può essere riparametrizzata dall'ascissa curvilinea s. Questo significa che, se $L = L_a^b(\alpha)$ è la lunghezza dell'arco α, allora possiamo scrivere*

$$\alpha(t) = \bar{\alpha}(s(t)) \quad \textit{per ogni } t \in [a, b]$$

dove $\bar{\alpha} : [0, L] \to \mathbf{R}^2$ e $|\bar{\alpha}'(s)| = 1$ per ogni $s \in [0, L]$.

- Se il parametro è l'ascissa curvilinea scriveremo direttamente

$$\alpha = \alpha(s), \quad s \in [0, L],$$

dove L è la lunghezza della traccia di α. Inoltre, il vettore velocità $\alpha'(s)$ ha norma costante, uguale a 1 per ogni $s \in [0, L]$. Porremo:

$$T(s) \doteq \alpha'(s)$$

e $T(s)$ sarà chiamato *versore tangente* di α.

Esempio. Si consideri la curva:

$$\alpha : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \end{cases} \quad t \in [0, 3]$$

la cui traccia è il segmento di retta che unisce $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si ha: $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ che ha norma costante $\sqrt{5}$, quindi non unitaria. La lunghezza totale è $L = 3\sqrt{5}$ e la funzione ascissa curvilinea è $s : [0, 3] \to [0, 3\sqrt{5}]$ definita da:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{5}\, dt = \sqrt{5}t$$

la cui inversa è $\phi(s) = \frac{1}{\sqrt{5}}s$, che indicheremo anche con $t = t(s) = \frac{1}{\sqrt{5}}s$. La parametrizzazione tramite ascissa curvilinea è:

$$\bar{\alpha}(s) = \begin{cases} x = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}s \\ y = -2 + \frac{1}{\sqrt{5}}s \end{cases} \quad s \in [0, 3\sqrt{5}].$$

Notiamo che in effetti:

$$T(s) = |\bar{\alpha}'(s)| = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

ha norma unitaria costante.

4 Teoria locale delle curve piane

Sia $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}^2$ una curva piana regolare, parametrizzata dall'ascissa curvilinea (in breve : PAC). Denotiamo con $T(s)$ il suo versore tangente:

$$\alpha'(s) = T(s).$$

Si noti che $T : [a, b] \to \mathbf{R}^2$ è una funzione vettoriale differenziabile. Poichè α è PAC, si avrà $|T(s)| = 1$ per ogni s. Nel punto $\alpha(s)$ avremo due versori normali a $T(s)$. Sceglieremo

$$N(s) = JT(s),$$

dove J è la rotazione di angolo $\pi/2$ intorno all'origine, nel senso antiorario. Si noti che J è rappresentato dalla matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^2$. Questo significa che, se

$$T(s) = \begin{pmatrix} T_1(s) \\ T_2(s) \end{pmatrix}$$

allora:

$$N(s) = JT(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1(s) \\ T_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T_2(s) \\ T_1(s) \end{pmatrix}.$$

- $N(s)$ è detto *versore normale* di α in s (o in $\alpha(s)$).
- Abbiamo dunque in ogni punto della traccia di α una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ data dalla coppia $(T(s), N(s))$, detta *riferimento di Frenet* della curva data.

Tale base è orientata in modo concorde alla base canonica (e_1, e_2), dove $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Abbiamo le seguenti identità, valide per ogni valore di s:

$$|T(s)|^2 = 1, \quad |N(s)|^2 = 1, \quad \langle T(s), N(s) \rangle = 0.$$

4.1 Curvatura

Se una curva è PAC, la derivata $\alpha'(s) = T(s)$ ha modulo costante, uguale a 1. Un modo per misurare la curvatura è quello di misurare quanto rapidamente cambia la direzione del suo versore tangente. Questo si fa derivando $T(s)$, cioè calcolando $T'(s) = \alpha''(s)$ (che è un vettore, detto *accelerazione* di α). Siccome $\langle T(s), T(s) \rangle = 1$, derivando otteniamo

$$\langle T'(s), T(s) \rangle = 0$$

per ogni s. Ne segue che $T'(s)$ è ortogonale a $T(s)$, dunque parallelo a $N(s)$, e possiamo scrivere:

$$T'(s) = k(s)N(s)$$

per un certo $k(s) \in \mathbf{R}$.

- $k(s)$ è detta *curvatura di α in s.*

Notiamo che $k(s)$ può essere sia positiva che negativa (o nulla, ovviamente), e inoltre

$$|k(s)| = |\alpha''(s)|$$

quindi il valore assoluto della curvatura uguaglia la norma del vettore accelerazione (ma attenzione, solo se la curva è parametrizzata dall'ascissa curvilinea !).

Vogliamo trovare un'altra espressione della curvatura. Dati due vettori $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ denoteremo con $\det(v, w)$ il determinante della matrice di colonne v, w, ovvero:

$$\det(v, w) = \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_2 - v_2 w_1.$$

Dalla definizione di curvatura otteniamo subito la seguente espressione:

$$k(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle.$$

D'altra parte, dalla definizione dell'operatore di rotazione J si ha che, per ogni coppia di vettori v, w del piano:

$$\langle v, Jw \rangle = \det(w, v) = -\det(v, w).$$

Poichè $T'(s) = \alpha''(s)$ e $N(s) = JT(s) = J\alpha'(s)$ otteniamo:

$$\begin{aligned} k(s) &= \langle T'(s), N(s) \rangle \\ &= \langle \alpha''(s), J\alpha'(s) \rangle \\ &= \det(\alpha'(s), \alpha''(s)) \end{aligned}$$

quindi

$$k(s) = \det(\alpha'(s), \alpha''(s)).$$

• Notiamo che $k(s)$ *dipende dal verso di percorrenza.* Invertendo il verso di percorrenza la curvatura cambia di segno.

Esempio. La curva $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$:

$$\alpha(s) = \begin{cases} x = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{5}} s \\ y = -2 + \dfrac{1}{\sqrt{5}} s \end{cases} \qquad s \in \mathbf{R}$$

parametrizza la retta del piano di equazione cartesiana $x - 2y - 5 = 0$ (ottenuta eliminando il parametro s). Si ha:

$$T(s) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad N(s) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

entrambi costanti. Poiché $T'(s) = 0$, l'accelerazione è nulla ovunque: dunque anche la curvatura è nulla ovunque.

• *Un segmento di retta ha curvatura nulla* (generalizzare l'argomento precedente).

Esempio. La curva

$$\alpha : \begin{cases} x = R\cos(\dfrac{s}{R}) \\ y = R\sin(\dfrac{s}{R}) \end{cases}, \quad s \in [0, 2\pi R]$$

ha per traccia la circonferenza di centro l'origine e raggio R, ed è parametrizzata dall'ascissa curvilinea poiché $|\alpha'(s)| = 1$. Notiamo che la circonferenza è percorsa in senso antiorario. Si ha:

$$\alpha'(s) = \begin{pmatrix} -\sin\frac{s}{R} \\ \cos\frac{s}{R} \end{pmatrix}, \quad \alpha''(s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R}\cos\frac{s}{R} \\ -\frac{1}{R}\sin\frac{s}{R} \end{pmatrix}$$

Per calcolare la curvatura, dobbiamo incolonnare le componenti dei vettori velocità e accelerazione, e calcolare il determinante della matrice cosi' ottenuta:

$$k(s) = \det(\alpha'(s), \alpha''(s)) = \det\begin{pmatrix} -\sin\frac{s}{R} & -\frac{1}{R}\cos\frac{s}{R} \\ \cos\frac{s}{R} & -\frac{1}{R}\sin\frac{s}{R} \end{pmatrix} = \frac{1}{R}.$$

Dunque:

• *La curvatura di una circonferenza, percorsa in senso antiorario, è costante, ed è uguale all'inverso del raggio.*

• Cambiando s in $-s$ nelle equazioni precedenti, cambia il verso di percorrenza e quindi il segno della curvatura. Percorsa in senso orario, la circonferenza ha curvatura data dall'opposto dell'inverso del raggio.

Anche se è sempre possibile parametrizzare una curva con l'ascissa curvilinea, è spesso impossibile trovare un'espressione *esplicita* dell'ascissa curvilinea in funzione delle funzioni dette "elementari"(polinomi, funzioni trigonometriche, esponenziali, logaritmi etc.).

Esempio. La funzione ascissa curvilinea, con origine in $t = 0$, della curva

$$\alpha : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

(la cui traccia è l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$) è:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u}\, du,$$

Se $a \neq b$, l'integrale non è immediatamente esprimibile in funzione delle funzioni elementari.

È dunque opportuno saper definire (e quindi calcolare) la curvatura direttamente a partire da una parametrizzazione qualunque, senza passare attraverso l'ascissa curvilinea. Del resto, la curvatura di una curva in un punto è una quantità *geometrica* che dipende solo dalla traccia della curva e non dalla sua parametrizzazione. Sia quindi $\alpha(t) : [a, b] \to \mathbf{R}^2$ una curva parametrizzata, e sia $\bar{\alpha} : [0, L] \to \mathbf{R}^2$ una riparametrizzazione di α dall'ascissa curvilinea s. Ricordiamo che vale la relazione:

$$\alpha(t) = \bar{\alpha}(s(t)), \tag{1}$$

dove $s(t) : [a, b] \to [0, L]$ è l'ascissa curvilinea.

- Definiamo *curvatura* $k(t)$ *di* α *in* t la curvatura di $\bar{\alpha}$ in $s(t)$.

Ecco come calcolarla.

Teorema 7. *Sia* $\alpha(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ *una parametrizzazione di una curva regolare, non necessariamante PAC. Allora:*

$$k(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{|\alpha'(t)|^3}.$$

Riparametrizzare tramite l'ascissa curvilinea e consideriamo $\bar{\alpha}(s)$ con $|\bar{\alpha}'(s)| = 1$. Dalla (1) otteniamo:

$$\alpha'(t) = \bar{\alpha}'(s) \cdot s'(t), \quad \alpha''(t) = \bar{\alpha}''(s) \cdot s'(t)^2 + \bar{\alpha}'(s) \cdot s''(t).$$

Ora sappiamo che:

$$\bar{\alpha}'(s) = T(s), \quad \bar{\alpha}''(s) = T'(s) = k(s)N(s), \quad s'(t) = |\alpha'(t)|, \quad s''(t) = \frac{d}{dt}|\alpha'(t)|.$$

Ne segue che :

$$\alpha'(t) = |\alpha'(t)|T(s), \quad \alpha''(t) = k(s)|\alpha'(t)|^2 N(s) + \frac{d}{dt}|\alpha'(t)| \cdot T(s).$$

Poiché $\det(T(s), T(s)) = 0$, e $\det(T(s), N(s)) = \det(T(s), JT(s)) = |T(s)|^2 = 1$:

$$\det(\alpha'(t), \alpha''(t)) = |\alpha'(t)|^3 k(s) \det(T(s), N(s)) = |\alpha'(t)|^3 k(s),$$

e la tesi segue dividendo ambo i membri per $|\alpha'(t)|^3$.

4.2 Formule di Frenet

Dall'identità $\langle N(s), N(s) \rangle = 1$ otteniamo, derivando rispetto a s:

$$\langle N'(s), N(s) \rangle = 0$$

dunque $N'(s)$ è ortogonale a $N(s)$, perciò parallelo a $T(s)$; possiamo allora scrivere

$$N'(s) = a(s)T(s)$$

per una funzione $a(s)$. Ora, derivando l 'identità $\langle T(s), N(s)\rangle = 0$ otteniamo

$$\langle T'(s), N(s)\rangle + \langle T(s), N'(s)\rangle = 0$$

da cui otteniamo facilmente $k(s) + a(s) = 0$. Dunque

$$N'(s) = -k(s)T(s).$$

Riassumendo, otteniamo le seguenti relazioni, dette *Formule di Frenet*:

$$\begin{cases} T'(s) = k(s)N(s) \\ N'(s) = -k(s)T(s) \end{cases}$$

che possiamo esprimere in forma matriciale come segue:

$$(T'(s), N'(s)) = (T(s), N(s)) \begin{pmatrix} 0 & -k(s) \\ k(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

5 Coordinate polari

Sia P un punto del piano di coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Le coordinate polari di P sono definite dalla coppia $\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$, dove r è la distanza di P dall'origine, e θ è l'angolo tra l'asse x e il vettore $\overline{OP}$. Si ha dunque:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

- Una curva piana può essere descritta in coordinate polari come grafico di una funzione

$$r = r(\theta).$$

Esempio. L'equazione $r = c$ dove c è una costante positiva, definisce la circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{c}$.

Esempio. L'equazione:

$$r = 1 + \cos\theta \tag{2}$$

definisce la *cardioide*.

Il grafico Γ della funzione $r = r(\theta)$ è definito come l'insieme dei punti del piano le cui coordinate polari sono date da

$$\begin{pmatrix} r(\theta) \\ \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in I.$$

Vogliamo ora parametrizzare Γ. Grazie alle identita' precedenti, x e y diventano funzioni del solo parametro θ:

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

Otteniamo dunque una curva parametrizzata da θ:

$$\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} r(\theta)\cos\theta \\ r(\theta)\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Possiamo calcolare ascissa curvilinea e curvatura in coordinate polari. Si ha:

$$\alpha'(\theta) = \begin{pmatrix} r'\cos\theta - r\sin\theta \\ r'\sin\theta + r\cos\theta \end{pmatrix},$$

quindi:

$$|\alpha'(\theta)|^2 = r'^2 + r^2.$$

- α è regolare se e solo se $r^2 + r'^2 > 0$, e l'ascissa curvilinea è data da

$$s(\theta) = \int_0^\theta \sqrt{r'^2 + r^2}\, d\theta.$$

Per la circonferenza $r = R$, si ha $s(\theta) = R\theta$, com'e' naturale.
Abbiamo poi:

$$\alpha'' = \begin{pmatrix} r''\cos\theta - 2r'\sin\theta - r\cos\theta \\ r''\sin\theta + 2r'\cos\theta - r\sin\theta \end{pmatrix}.$$

e quindi:

$$\det(\alpha', \alpha'') = \det\begin{pmatrix} r'\cos\theta - r\sin\theta & r''\cos\theta - 2r'\sin\theta - r\cos\theta \\ r'\sin\theta + r\cos\theta & r''\sin\theta + 2r'\cos\theta - r\sin\theta \end{pmatrix}$$

che dopo alcuni calcoli dà:

$$\det(\alpha', \alpha'') = 2r'^2 - rr'' + r^2.$$

Ricordando che

$$k = \frac{\det(\alpha', \alpha'')}{|\alpha'|^{3/2}},$$

otteniamo la seguente

Proposizione 8. *Abbiamo la seguente espressione della curvatura di una curva in coordinate polari $r = r(\theta)$:*

$$k(\theta) = \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$$

5.1 Esempio: cardioide

In coordinate polari $r = 1 + \cos\theta$. Parametrizzazione:

$$\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} (1+\cos\theta)\cos\theta \\ (1+\cos\theta)\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Abbiamo:

$$\begin{cases} r' = -\sin\theta \\ r'' = -\cos\theta = 1 - r \end{cases}$$

L'unico punto singolare è $\theta = \pi$, che corrisponde all'origine. Abbiamo

$$r^2 + r'^2 = (1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta = 2(1+\cos\theta) = 2r$$

Poi:

$$2r'^2 - rr'' + r^2 = 2r'^2 - r(1-r) + r^2 = 2r'^2 + 2r^2 - r = 4r - r = 3r$$

In conclusione:

$$k(\theta) = \frac{3r}{(2r)^{3/2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}\sqrt{r}},$$

ovvero:

$$k(\theta) = \frac{3}{2\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\theta}}.$$

Quando $\theta \to \pi$ il punto mobile tende all'origine e la curvatura tende all'infinito.

6 Trasformazioni di $\mathbf{R}^n$

Una *trasformazione di* $\mathbf{R}^n$ è un'applicazione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ biunivoca (cioè, iniettiva e suriettiva). I punti di $\mathbf{R}^n$ avranno coordinate scritte in forma colonna, quindi se $x \in \mathbf{R}^n$ allora

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Date due trasformazioni f, g di $\mathbf{R}^n$ l'applicazione composta $f \circ g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, definita da

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

è biunivoca (come si verifica subito), dunque è anch'essa una trasformazione di $\mathbf{R}^n$. Notiamo che in questo caso applichiamo prima g poi f. Possiamo comporre le due trasformazioni nel verso opposto, cioè applicando prima f poi g, per ottenere la trasformazione $g \circ f$. Osserviamo che, in generale,

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

Essendo biunvoca, ogni trasformazione f di $\mathbf{R}^n$ ammette la trasformazione *inversa* f^{-1} : $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ definita dalla condizione $f \circ f^{-1} = I = f^{-1} \circ f$, dove $I : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ è la trasformazione identica:

$$I(x) = x \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{R}^n.$$

Si ha quindi, per definizione,

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{R}^n,$$

e ovviamente

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{per ogni } y \in \mathbf{R}^n.$$

6.1 Trasformazioni lineari di $\mathbf{R}^n$

Una trasformazione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ si dice *lineare* se soddisfa

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(kx) = kf(x)$$

per ogni $x, y \in \mathbf{R}^n$, per ogni $k \in \mathbf{R}$. È noto che f è lineare se e solo se si scrive

$$f(x) = Ax,$$

dove A è la matrice $n \times n$ associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^n$, e dove Ax indica il prodotto della matrice A per il vettore colonna x.

- A è detta anche *matrice canonica* di f.

Inoltre, f è biunivoca se e solo se det$A \neq 0$, e in tal caso $f^{-1}(x) = A^{-1}x$, con A^{-1} matrice inversa di A.

Esempio. *Sia* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *definita da*

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Allora $f(x) = Ax$ *dove*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\det A = 5 \neq 0$ *si vede che* f *è biunivoca, quindi è una trasformazione di* $\mathbf{R}^2$. *Si vede che*

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

dunque

$$f^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

7 Isometrie

Dati i vettori $v, w \in \mathbf{R}^n$:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix},$$

il loro *prodotto scalare* è definito da

$$\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n.$$

In particolare, la *norma* del vettore v si ottiene come

$$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Dati due punti $x, y \in \mathbf{R}^n$, la loro distanza si definisce come norma del vettore $x - y$:

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Diremo che l'applicazione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ è un'*isometria* se conserva la distanza, se cioè

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y) \quad \text{per ogni} \quad x, y \in \mathbf{R}^n,$$

ovvero

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{per ogni} \quad x, y \in \mathbf{R}^n.$$

• Si verifica facilmente che ogni isometria è iniettiva: infatti

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\implies |f(x) - f(y)| = 0 \\ &\implies |x - y| = 0 \\ &\implies x = y. \end{aligned}$$

Inoltre, la composizione di due isometrie è ancora un'isometria. Vedremo piu' in avanti che ogni isometria è anche suriettiva, dunque biunivoca.

• Un'isometria $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ si dice *lineare* se f è, per l'appunto, un'applicazione lineare. Risulta che un'applicazione lineare è un'isometria se e solo se conserva il prodotto scalare, cioè se e solo se

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

per ogni $x, y \in \mathbf{R}^n$; inoltre, la sua matrice associata rispetto alla base canonica è ortogonale. Nella prossima sezione richiamereremo le proprietà importanti delle matrici ortogonali.

8 Matrici ortogonali

Una matrice quadrata A, di tipo $n \times n$, si dice *ortogonale* se

$$A^t A = I. \tag{3}$$

Quindi una matrice è ortogonale se e solo se è invertibile, e l'inversa coincide con la trasposta:

$$A^{-1} = A^t.$$

Ne segue che una condizione equivalente è $AA^t = I$. Applicando la formula di Binet ad ambo i membri della (3), e tenendo conto del fatto che $\det A = \det(A^t)$, otteniamo che:

- se A è una matrice ortogonale allora $\det A = \pm 1$.

L'insieme delle matrici ortogonali di ordine n si denota con $\mathbf{O}(n)$; tale insieme è detto *gruppo ortogonale di ordine n*. Il sottoinsieme formato dalle matrici ortogonali aventi determinante 1 è denotato con $\mathbf{SO}(n)$, detto *gruppo speciale ortogonale* di ordine n. Quindi:

$$\mathbf{SO}(n) = \{A \in \mathbf{O}(n) : \det A = 1\}.$$

Le seguenti proprietà sono di facile verifica: $I \in \mathbf{O}(n)$; se $A, B \in \mathbf{O}(n)$ allora $AB \in \mathbf{O}(n)$ e se $A \in \mathbf{O}(n)$ allora $A^{-1} \in \mathbf{O}(n)$.

Esempio. Introduciamo le seguenti matrici 2×2:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbf{R}.$$

Verificare che $R_\theta R_\phi = R_{\theta+\phi}$; in effetti R_θ rappresenta (rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^2$) l'applicazione lineare data dalla rotazione di θ radianti intorno all'origine, in senso antiorario. In particolare, se $\theta = \pi/2$:

$$R_{\pi/2} = J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

cosicché $J^2 = -I$. È chiaro che si ha, per ogni θ:

$$\det R_\theta = 1.$$

D'altra parte, un calcolo mostra che $S_\theta^2 = I$ per ogni θ; in effetti, non è difficile dimostrare che S_θ rappresenta la simmetria (riflessione) del piano attorno alla retta per l'origine che forma un angolo $\theta/2$ con l'asse x. Si ha, per ogni θ:

$$\det S_\theta = -1.$$

Le matrici ortogonali di ordine 2 sono rotazioni R_θ o simmetrie S_θ, per qualche $\theta \in \mathbf{R}$:

Proposizione 9. *Si ha:*

$$\mathbf{O}(2) = \{R_\theta, S_\theta : \theta \in \mathbf{R}\}, \quad \mathbf{SO}(2) = \{R_\theta : \theta \in \mathbf{R}\}.$$

La proprietà che segue mostra che una matrice è ortogonale se e solo se conserva il prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^n$; poichè il prodotto scalare determina la norma di vettori (quindi la distanza di due punti), risulta che una matrice ortogonale definisce, in particolare, un'isometria lineare di $\mathbf{R}^n$.

Teorema 10.
a) Una matrice $A \in \mathbf{Mat}(n \times n)$ è ortogonale se e solo se

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$$

per ogni $x, y \in \mathbf{R}^n$.
b) Se A è una matrice ortogonale, allora $|Ax| = |x|$ per ogni $x \in \mathbf{R}^n$; inoltre, per ogni $x, y \in \mathbf{R}^n$:

$$d(Ax, Ay) = d(x, y).$$

Dimostrazione. Data una qualunque matrice $A \in \mathbf{Mat}(n \times n)$, e dati due vettori $x, y \in \mathbf{R}^n$ si ha sempre la seguente identità:

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^t y \rangle. \tag{4}$$

Infatti, sia a_{ij} l'elemento di riga i e colonna j della matrice A. Se $(e_1, \dots, e_n)$ è la base canonica di $\mathbf{R}^n$, allora le colonne di A sono $Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n$. Questo implica che:

$$\langle Ae_i, e_j \rangle = a_{ij} = \langle e_i, A^t e_j \rangle$$

per ogni i, j. Dunque (4) è vera per i vettori della base canonica. Scrivendo i vettori arbitrari x e y come combinazione lineare dei vettori della base canonica, e usando le proprietà di bilinearità del prodotto scalare, si dimostra la (4) in generale.
Dimostriamo a). Supponiamo che A sia ortogonale; dunque $A^t A = I$ e, per la (4):

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, A^t Ay \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{per ogni } x, y.$$

Viceversa, supponiamo che si abbia $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ per ogni x, y: abbiamo allora $\langle x, A^t Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ per ogni x. Di conseguenza $A^t Ay = y$ per ogni y, e dunque

$$A^t A = I.$$

Questo dimostra che A è una matrice ortogonale.
Dimostriamo ora b). Sappiamo che $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ dunque, per la a), si ha

$$|Ax| = \sqrt{\langle Ax, Ax \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = |x|.$$

Riguardo alla seconda affermazione, ricordiamo che la distanza di due punti x, y di $\mathbf{R}^n$ si ottiene come norma della differenza tra x e y: $d(x,y) = |x-y|$. Dunque, per quanto appena detto:

$$d(Ax, Ay) = |Ax - Ay| = |A(x-y)| = |x-y| = d(x,y).$$

$\square$

La proposizione seguente è una facile conseguenza della proprietà precedente.

Proposizione 11.

a) Una matrice è ortogonale se e solo se le sue colonne formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$*; quindi,* A *trasforma basi ortonormali in basi ortonormali.*

b) Date due basi ortonormali $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n), \mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_n)$ *esiste un'unica matrice* $A \in \mathbf{O}(n)$ *che trasforma* $\mathcal{B}$ *in* $\mathcal{B}'$*, cioè tale che* $Av_i = w_i$ *per ogni* $i = 1, \dots n$.

• Una base ortonormale $(u_1, \dots, u_n)$ si dice *positivamente (risp. negativamente) orientata* se il determinante della matrice di colonne $u_1, \dots, u_n$ vale 1 (risp. -1).

Esempio. In $\mathbf{R}^2$, se v ha norma unitaria, allora la base ortonormale (v, Jv) è positivamente orientata. Infatti, se $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ allora $Jv = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$ dunque $\det(v, Jv) = v_1^2 + v_2^2 = 1$.

• Date due basi ortonormali positivamente orientate esiste un'unica matrice ortogonale di determinante 1 che trasforma l'una nell'altra. Dunque $A \in \mathbf{SO}(n)$ se e solo se A trasforma basi ortonormali positivamente orientate in basi ortonormali positivamente orientate.

9 Classificazione delle isometrie

Iniziamo dalla seguente proposizione.

Proposizione 12. a) *Sia* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *un'isometria tale che* $f(0) = 0$. *Allora* f *è un'isometria lineare che si esprime*

$$f(x) = Ax,$$

con A *matrice ortogonale, cioè tale che* $A^t A = I$.

b) *Viceversa, ogni applicazione lineare* $f(x) = Ax$ *con* A *matrice ortogonale è un'isometria.*

Dimostrazione. a) I passi sono i seguenti.

1. f conserva norma e prodotto scalare.

2. f è lineare.

3. La matrice canonica di f è ortogonale.

Dim. di **1.** Poichè si ha $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ per ogni x, y otteniamo in particolare, prendendo $y = 0$:

$$|f(x)| = |x|.$$

Dunque f conserva la norma. In secondo luogo, poiché $|f(x) - f(y)|^2 = |x - y|^2$ otteniamo, ricordando che $|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2\langle x, y\rangle$ e sviluppando in modo analogo $|f(x) - f(y)|^2$:

$$|x|^2 + |y|^2 - 2\langle x, y\rangle = |f(x)|^2 + |f(y)|^2 - 2\langle f(x), f(y)\rangle$$

Poiché f conserva la norma otteniamo immediatamente $\langle x, y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle$ e f conserva anche il prodotto scalare.

Dim di **2.** Dobbiamo verificare che $f(x + y) = f(x) + f(y)$ e $f(kx) = kf(x)$ per ogni $x, y \in \mathbf{R}^n$ e $k \in \mathbf{R}$. La prima identità è verificata se e solo se $|f(x + y) - f(x) - f(y)|^2 = 0$. Sviluppando il membro a sinistra in funzione della norma e del prodotto scalare degli addendi $f(x + y), f(x)$ e $f(y)$ e ricordando che f conserva tali operazioni, otteniamo facilmente l'asserto. La seconda identità si verifica in modo analogo, dimostrando che $|f(kx) - kf(x)|^2 = 0$.

Dim. di **3.** Dalla parte 2 sappiamo che f è lineare, dunque si scrive $f(x) = Ax$ per una matrice A. Dimostriamo che A è ortogonale. Ora

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \langle f(x), f(y)\rangle \\ &= \langle Ax, Ay\rangle \\ &= \langle x, A^t Ay\rangle.\end{aligned}$$

Dunque l'identità

$$\langle x, y - A^t Ay\rangle = 0$$

risulta vera per ogni x, e necessariamente $A^t Ay = y$ per ogni y, il che implica che $A^t A = I$. Dunque A è una matrice ortogonale.

La parte b) è una conseguenza immediata della parte b) del Teorema 10. □

• Notiamo che un'isometria lineare è iniettiva e suriettiva, poiché il determinante di una matrice ortogonale vale ± 1, ed è dunque non nullo; ne segue che ogni isometria lineare è una trasformazione del piano.

Esempio. Abbiamo quindi la prima famiglia di isometrie, le *isometrie lineari*, che sono in corrispondenza biunivoca con le matrici ortogonali. Ecco una seconda famiglia di isometrie.

Esempio. La *traslazione di vettore* p è la trasformazione T_p definita da:

$$T_p(x) = x + p \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{R}^n.$$

Si ha $|T_p(x) - T_p(y)| = |x + p - (y + p)| = |x - y|$ dunque T_p è un'isometria per ogni $p \in \mathbf{R}^n$. Chiaramente, T_p non è lineare poichè $T_p(0) = p$.

A questo punto è facile dimostrare che una qualunque isometria di $\mathbf{R}^n$ è composta da un'isometria lineare e da una traslazione.

Teorema 13. *Le isometrie di $\mathbf{R}^n$ sono tutte e sole le trasformazioni $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ tali che*

$$f(x) = Ax + p$$

dove A è una matrice ortogonale e p è un vettore di $\mathbf{R}^n$.

Dimostrazione. È chiaro che una trasformazione del tipo dato : $f(x) = Ax+p$ è un'isometria, poichè composta della isometria lineare di matrice (ortogonale) A con la traslazione di vettore p, che sono entrambe isometrie. Viceversa, sia f un'isometria di $\mathbf{R}^n$, e supponiamo che $f(0) = p$. Consideriamo l'isometria

$$g = T_{-p} \circ f.$$

Per ipotesi $g(0) = T_{-p}(f(0)) = T_{-p}(p) = -p + p = 0$. Per la Proposizione precedente, g è lineare e si scrive $g(x) = Ax$ per una matrice ortogonale A. D'altronde

$$g(x) = T_{-p}(f(x)) = f(x) - p,$$

da cui otteniamo $f(x) = Ax + p$, c.d.d. □

9.1 Isometrie dirette e inverse

Sia $f(x) = Ax + p$ un'isometria di $\mathbf{R}^n$. Diremo che f è un'isometria *diretta* se $\det A = 1$ (quindi se $A \in \mathbf{SO}(n)$), *inversa* se $\det A = -1$.

Esempio. Un'isometria del piano $\mathbf{R}^2$ è diretta se è una rotazione (eventualmente seguita da una traslazione); è inversa se è un ribaltamento rispetto a una retta.

10 Teoremi di rigidità

10.1 La curvatura è invariante per isometrie

Sia ora $\alpha : [0, L] \to \mathbf{R}^2$ una curva piana PAC, e sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ un'isometria diretta. Dunque

$$f(x) = Ax + b$$

dove $A \in \mathbf{SO}(n)$ e b è il vettore di traslazione. Otteniamo una seconda curva $\beta : [0, L] \to \mathbf{R}^2$ semplicemente componendo α con f:

$$\beta = f \circ \alpha.$$

Teorema 14. *Nella notazione precedente, sia $k_\alpha(s)$ la curvatura di α in s, e sia $k_\beta(s)$ la curvatura di β in s. Allora:*

$$k_\alpha(s) = k_\beta(s).$$

Dimostrazione. Se scriviamo

$$\alpha(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$$

abbiamo

$$\beta(s) = A \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} + b,$$

dunque:

$$\beta'(s) = A \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix} = A\alpha'(s). \tag{5}$$

Indichiamo con $T_\alpha(s), T_\beta(s)$ i versori tangenti di α e β, e con $N_\alpha(s), N_\beta(s)$ i rispettivi versori normali. La relazione (5) si scrive:

$$T_\beta(s) = AT_\alpha(s).$$

Siccome f è diretta, A conserva l'orientazione, dunque

$$N_\beta(s) = AN_\alpha(s).$$

Ora:

$$T'_\beta(s) = AT'_\alpha(s) = k_\alpha(s)AN_\alpha(s) = k_\alpha(s)N_\beta(s).$$

D'altra parte, per definizione abbiamo anche:

$$T'_\beta(s) = k_\beta(s)N_\beta(s),$$

dunque $k_\alpha(s) = k_\beta(s)$.

□

- Verificare che, se f è un'isometria inversa, allora $k_\beta(s) = -k_\alpha(s)$ per ogni s.

10.2 Teoremi di rigidità

In questa sezione dimostreremo che, assegnata una funzione $\bar{k}(s)$ sull'intervallo $[0, L]$, allora esiste almeno una curva $\alpha : [0, L] \to \mathbf{R}^2$ che abbia curvatura, punto per punto, uguale a $\bar{k}(s)$. Inoltre tale curva è unica a meno di isometrie; ciò significa che due curve aventi la stessa curvatura punto per punto differiscono per un'isometria diretta.

Iniziamo dal seguente teorema, che costituisce il passo principale.

Teorema 15. *Data una funzione* $\bar{k} : [0, L] \to \mathbf{R}$*, un punto* $\alpha_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ *e un vettore unitario* $T_0 = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 \\ \sin\theta_0 \end{pmatrix}$ *esiste un'unica curva* $\alpha : [0, L] \to \mathbf{R}^2$ *parametrizzata dall'ascissa curvilinea tale che*

$$\begin{cases} \alpha(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ \alpha'(0) = T_0 \\ k_\alpha(s) = \bar{k}(s) \quad \textit{per ogni } s \in [0, L]. \end{cases} \tag{6}$$

dove $k_\alpha(s)$ indica la curvatura di α in s.

Dimostrazione. Iniziamo dall'esistenza. Definiamo una funzione $\theta : [0, L] \to \mathbf{R}$ come segue:

$$\theta(s) = \int_0^s \bar{k}(u)\, du + \theta_0.$$

Siano:

$$\begin{cases} x(s) = \displaystyle\int_0^s \cos\theta(u)\, du + x_0 \\ y(s) = \displaystyle\int_0^s \sin\theta(u)\, du + y_0 \end{cases}$$

e si consideri la curva $\alpha : [0, L] \to \mathbf{R}^2$ definita da:

$$\alpha(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}.$$

Vogliamo dimostrare che α soddisfa i requisiti del teorema. Ora è chiaro dalla definizione di $x(s)$ e $y(s)$ che $\alpha(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Inoltre:

$$\alpha'(s) = \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta(s) \\ \sin\theta(s) \end{pmatrix}$$

quindi $\alpha'(0) = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 \\ \sin\theta_0 \end{pmatrix} = T_0$; inoltre α è parametrizzata dall'ascissa curvilinea, poichè $|\alpha'(s)| = 1$ per ogni s. Si ha:

$$\alpha''(s) = \begin{pmatrix} -\sin\theta(s) \cdot \theta'(s) \\ \cos\theta(s) \cdot \theta'(s) \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$\begin{aligned} k_\alpha(s) &= \det(\alpha'(s), \alpha''(s)) \\ &= \begin{vmatrix} \cos\theta(s) & -\sin\theta(s) \cdot \theta'(s) \\ \sin\theta(s) & \cos\theta(s) \cdot \theta'(s) \end{vmatrix} \\ &= \theta'(s) \\ &= \bar{k}(s) \end{aligned}$$

ed effettivamente α ha curvatura prescritta da $\bar{k}$.

Unicità. Supponiamo che $\beta : [0, L] \to \mathbf{R}^2$ sia una seconda curva che verifica (6), dunque, in particolare,

$$k_\beta(s) = \bar{k}(s)$$

per ogni $s \in [0, L]$. Sia $T_\alpha(s)$ (risp. $T_\beta(s)$) il versore tangente di α (risp. β). Notiamo che

$$T_\alpha(0) = T_\beta(0) = T_0.$$

Vogliamo dimostrare che $T_\alpha(s) = T_\beta(s)$ per ogni s. A tale scopo, consideriamo la funzione

$$\psi(s) = \langle T_\alpha(s), T_\beta(s)\rangle.$$

Si ha:

$$\psi(0) = 1;$$

se dimostriamo che $\psi'(s) = 0$ per ogni s allora $\psi(s) = 1$ per ogni s e questo implica che $T_\alpha(s) = T_\beta(s)$ per ogni s. Ora:

$$\begin{aligned}\psi'(s) &= \langle T'_\alpha(s), T_\beta(s)\rangle + \langle T_\alpha(s), T'_\beta(s)\rangle \\ &= \bar{k}(s)\langle N_\alpha(s), T_\beta(s)\rangle + \bar{k}(s)\langle T_\alpha(s), N_\beta(s)\rangle\end{aligned}$$

Ora $N_\alpha(s) = JT_\alpha(s)$ e $N_\beta(s) = JT_\beta(s)$; la matrice di rotazione J soddisfa $J^2 = -I$, e inoltre, poichè è ortogonale, conserva il prodotto scalare, dunque $\langle Ju, Jv\rangle = \langle u, v\rangle$ per ogni $u, v \in \mathbf{R}^2$. Dunque:

$$\begin{aligned}\langle N_\alpha(s), T_\beta(s)\rangle &= \langle JT_\alpha(s), T_\beta(s)\rangle \\ &= \langle J^2T_\alpha(s), JT_\beta(s)\rangle \\ &= -\langle T_\alpha(s), N_\beta(s)\rangle\end{aligned}$$

cioè $\langle N_\alpha(s), T_\beta(s)\rangle = -\langle T_\alpha(s), N_\beta(s)\rangle$, quindi $\psi'(s) = 0$ e $T_\alpha(s) = T_\beta(s)$ per ogni s.
Infine, poichè $\beta(0) = \alpha(0)$ otteniamo, per ogni s:

$$\beta(s) = \int_0^s T_\beta(u)\,du + \beta(0) = \int_0^s T_\alpha(u)\,du + \alpha(0) = \alpha(s),$$

e il teorema è dimostrato. □

Osserviamo la conseguenza seguente.

Corollario 16. *Data una funzione $\bar{k} : [0, L] \to \mathbf{R}$ esiste almeno una curva $\alpha : [0, L] \to \mathbf{R}^2$ la cui curvatura è, punto per punto, uguale a $\bar{k}$:*

$$k_\alpha(s) = \bar{k}(s), \quad \textit{per ogni } s \in [0, L].$$

Se $\beta : [0, L] \to \mathbf{R}^2$ è un'altra tale curva, allora esiste un'isometria diretta f di $\mathbf{R}^2$ tale che $\beta = f \circ \alpha$.

• Il corollario si può enunciare brevemente cosi': *a meno di isometrie, esiste un'unica curva piana avente curvatura assegnata.*

Dimostrazione. L'esistenza della curva α è stata già dimostrata. Dimostriamo la seconda parte. Sia $\mathcal{T}_\alpha = (T_\alpha(0), N_\alpha(0))$ il riferimento di Frenet di α nel punto iniziale $\alpha(0)$ e sia $\mathcal{T}_\beta = (T_\beta(0), N_\beta(0))$ il corrispondente riferimento di β nel punto iniziale $\beta(0)$ di β. Si consideri la matrice ortogonale che porta $\mathcal{T}_\alpha$ in $\mathcal{T}_\beta$: si noti che $\det A = 1$ poichè i due riferimenti sono entrambi positivamente orientati. Si consideri l'isometria diretta :

$$f(x) = Ax + b, \quad \text{dove } b = \beta(0) - A\alpha(0),$$

e sia $\tilde{\beta} = f \circ \alpha$. Ora si verifica subito che $\tilde{\beta}(0) = \beta(0)$ e inoltre $\tilde{\beta}'(0) = A\alpha'(0) = AT_\alpha(0) = T_\beta(0) = \beta'(0)$; poichè la curvatura è invariante per isometrie dirette, la curvatura di $\tilde{\beta}$ è uguale, punto per punto a $\bar{k}(s) = k_\beta$. In conclusione, abbiamo che

$$\tilde{\beta}(0) = \beta(0), \quad \tilde{\beta}'(0) = \beta'(0), \quad k_{\tilde{\beta}} = k_\beta.$$

Per l'unicità (vedi teorema precedente) si ha necessariamente $\tilde{\beta} = \beta$. Dunque $\beta = f \circ \alpha$.

$\square$

11 Esercizi

Esercizio 1. Si consideri la curva parametrizzata

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos(2t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

a) Stabilire per quali valori di t la parametrizzazione è regolare.

b) Sia Γ la traccia di α. Descrivere Γ con un'equazione in x e y (eliminare il parametro t).

c) Parametrizzare, se possibile, la traccia di α in modo regolare.

Esercizio 2. Studiare la curva (spirale logaritmica)

$$\alpha : \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

In particolare, disegnare la sua traccia e calcolarne la curvatura. Inoltre, determinare l'equazione cartesiana della retta tangente nei punti corrispondenti ai valori $t = 2k\pi$ del parametro, con k intero positivo.

Esercizio 3. Sia Γ il ramo dell'iperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0,$$

che giace nel semipiano $x > 0$. Dopo aver parametrizzato Γ in modo regolare, determinare il valore massimo e minimo della sua curvatura, e gli eventuali punti dove tali estremi sono raggiunti (per il segno, si assuma che la curva sia percorsa nel verso delle y crescenti).

Esercizio 4. Ripetere l'esercizio precedente per l'ellisse in forma canonica $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, percorsa in senso antioriario (si assuma $a \geq b > 0$).

Esercizio 5. Ripetere l'esercizio precedente per la parabola in forma canonica $y^2 = 2px$, percorsa nel verso delle y crescenti (si assuma $p > 0$).

Esercizio 6. Supponiamo noto che $\alpha : [0, \infty) \to \mathbf{R}^2$ sia una curva piana, parametrizzata dall'ascissa curvilinea, tale che:

$$\alpha(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha'(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare l'equazione cartesiana della traccia di α, supponendo che la curvatura sia costante, pari a 2, per ogni valore di s.

b) Determinare l'equazione cartesiana se, invece, la curvatura vale -2 per ogni valore di s.

Esercizio 7. È data la curva in coordinate polari:

$$r = a + \cos\theta, \quad a \geq 1$$

a) Stabilire per quali valori di a la curva è regolare.

b) Dopo aver verificato che α è chiusa, determinare la sua lunghezza quando $a = 1$.

c) Determinare la curvatura nel punto $\alpha(\theta)$ per ogni θ; stabilire per quali valori di a la curvatura non cambia di segno (cioè, è sempre positiva, o sempre negativa).

Esercizio 8. Calcolare la curvatura della curva di livello $\cosh x - y = 0$; inoltre, calcolare la lunghezza dell'arco di curva corrispondente all'intervallo $x \in [-1, 1]$.

Esercizio 9. Si consideri la curva Γ, grafico della funzione $y = f(x)$ sull'intervallo $[a, b]$. Determinare formule esplicite per le seguenti funzioni :

a) Lunghezza $L(x)$ della parte di grafico di f sull'intervallo $[a, x]$, con $x \leq b$.

b) Curvatura $k(x)$ di Γ nel suo punto $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$, assumendo che Γ sia percorsa nel verso delle x crescenti.

c) Supponiamo ora che la funzione $k(x)$ sia tale che

$$k(x) = \frac{2}{(1 + f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{per ogni } x \in [a, b].$$

Che tipo di curva è Γ ?

Esercizio 10. Si consideri la curva Γ, grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{x}\cos(x^2)$ sull'intervallo $(0, \infty)$. Si noti che Γ è contenuta nella striscia di piano compresa tra le curve $y = \frac{1}{x}$

e $y = -\frac{1}{x}$; in particolare, quando $x \to \infty$ la curva Γ "tende" asintoticamente all'asse x. Dimostrare che, pero', la curvatura di Γ non tende a zero, determinando esplicitamente una successione di punti $\{x_n\}$ tale che:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} |k(x_n)| = +\infty,$$

dove $k(x)$ indica la curvatura di Γ nel suo punto $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$.

Esercizio 11. Ricordiamo che, data una curva parametrizzata $\alpha : [a,b] \to \mathbf{R}^2$, e dato un diffeomorfismo $\phi : [c,d] \to [a,b]$, la curva $\beta = \alpha \circ \phi : [c,d] \to \mathbf{R}^2$ è detta una *riparametrizzazione di* α, che sarà detta *diretta* se conserva il verso di percorrenza (cioè $\phi'(t) > 0$ per ogni t), e *inversa* se lo inverte (cioè $\phi'(t) < 0$ per ogni t).
Con k_α indicheremo la curvatura di α, quindi:

$$k_\alpha(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{|\alpha'(t)|^3}.$$

Dimostrare che, se $\beta = \alpha \circ \phi$ è una riparametrizzazione diretta di α, allora:

$$k_\beta(t) = k_\alpha(\phi(t)), \quad \text{per ogni } t \in [c,d].$$

Se la riparametrizzazione è inversa si avra' ovviamente

$$k_\beta(t) = -k_\alpha(\phi(t)), \quad \text{per ogni } t \in [c,d].$$