Test di Geometria (versione corretta)
Ing. Meccanica a.a. 2017/18

Il test consiste di sei esercizi, e ha la durata di tre ore. Rispondere negli spazi predisposti, e giustificare le risposte in modo chiaro e conciso (se occorre, usare il retro del foglio).

Esercizio 1 È data la conica $\gamma_k : 2x^2 + 5y^2 + 4xy + 2kx = 0$, dipendente dal parametro k.
a) Determinare i valori di $k \in \mathbf{R}$ per i quali γ_k è generale, e in corrispondenza di tali valori trovare la sua forma canonica.

b) Determinare i valori di k per i quali la conica è contenuta in una striscia di piano di ampiezza 5. (Nota: una striscia di piano è la regione compresa tra due rette parallele).

c) Dopo aver verificato che per $k = 6$ la conica è un'ellisse reale, si determinino le equazioni della circonferenza σ_1, inscritta a γ_6, e della circonferenza σ_2, circoscritta a γ_6.

Esercizio 2

a) Nello spazio è data la retta r di equazioni cartesiane $\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$. Determinare l'equazione cartesiana della retta s per l'origine, perpendicolare ed incidente la retta r.

b) Determinare l'equazione della sfera passante per i punti $A = (2, 0, 0), B = (0, 2, 0)$ e $C = (0, 0, 2)$ e avente centro sul piano $\pi : x + 2y + z - 8 = 0$.

c) Determinare tutti i punti P tali che $\{A, B, C, P\}$ sia l'insieme dei vertici di un tetraedro regolare dove A, B e C sono come al punto precedente. Ricordiamo che un tetraedro regolare è un poliedro le cui quattro facce sono triangoli equilateri.

Esercizio 3 a) Sia (v_1, v_2, v_3, v_4) una base di uno spazio vettoriale V. Dato un parametro reale k, si consideri l'unico endomorfismo f di V tale che

$$\begin{cases} f(v_1) = v_2 \\ f(v_2) = kv_1 + v_3 \\ f(v_3) = kv_1 + v_4 \\ f(v_4) = 2v_1 + kv_2 + kv_3 + kv_4. \end{cases}$$

a) Determinare i valori di k per i quali f risulta iniettivo.

b) Determinare una base del nucleo di f in corrispondenza dei valori di k per i quali esso non è iniettivo.

c) Si fissi ora $k = 0$. Stabilire se esiste una base di V rispetto alla quale la matrice associata a f risulta diagonale.

Esercizio 4 a) Sia A una matrice $m \times n$ e $X = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbf{R}^n$. Si consideri il sottospazio $E = \{X \in \mathbf{R}^n : AX = O\}$. Esprimere la dimensione di E in funzione di m, n e $\mathrm{rk}A$. Dimostrare poi che, se $m < n$, allora $\dim E \geq 1$.

b) Sono dati i sottospazi F, F, G di $\mathbf{R}^4$, aventi equazioni rispettive:

$$\begin{cases} E : x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ F : x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ G : x_1 - x_2 + 4x_3 + kx_4 = 0 \end{cases}$$

(si noti che G dipende dal parametro k). Determinare, se possibile, una base di E formata da vettori le cui componenti sono numeri interi, e poi una base ortonormale di $E \cap F$.

c) Per i sottospazi di cui al punto precedente, calcolare $\dim(F \cap G)$ e $\dim(E \cap F \cap G)$ al variare di k.

Esercizio 5 È data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Determinare gli autovalori di A.

b) Determinare, se possibile, una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.

c) Sia ora B una matrice $n \times n$ non diagonalizzabile, che ammetta un autovalore nullo. È vero che BB^t è diagonalizzabile ? È vero che BB^t è invertibile ? (Rispondere motivando la risposta, e chiarire se la verità o la falsità dell'affermazione dipende dalla scelta della matrice B).

Esercizio 6

a) Sono date le matrici $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Stabilire se A_1, A_2, A_3, A_4, in quanto vettori di $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$, formano una base di $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$, e in tal caso calcolare le coordinate di $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ rispetto a tale base.

b) Dato il punto $A = (1, 0, 1)$, determinare il punto B sul piano $\pi : x + y + 2z = 0$ tale che il vettore $\vec{AB}$ abbia lunghezza minima.

c) Trovare, se possibile, un endomorfismo f di $\mathbf{R}^2$ avente autovalori $1, 3$ e tale che $\dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathrm{Im} f$.