Test di Geometria
Ing. Meccanica a.a. 2018/19

Il test consiste di sei esercizi, e ha la durata di tre ore. Rispondere negli spazi predisposti, e giustificare le risposte in modo chiaro e conciso (se occorre, usare il retro del foglio).

Esercizio 1 a) Sono dati: la matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, e l'endomorfismo f di $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$ definito da $f(A) = AN$ per ogni $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2)$. Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ di $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$.

b) Calcolare una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

c) È possibile che un'applicazione lineare $g : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ sia iniettiva ? (Se è possibile, dare un esempio, se non lo è, dimostrare perché).

Esercizio 2 Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^4$ si considerino i sottospazi vettoriali

$$V = L\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right], \quad W : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

a) Calcolare la dimensione e determinare una base ortogonale (se esiste) del sottospazio W.

b) Calcolare la dimensione e determinare una base del sottospazio $V^{\perp}$.

c) Calcolare la dimensione e determinare una base di ciascuno dei sottospazi $V \cap W$ e $V + W$, dire inoltre se la somma $V + W$ è diretta oppure no.

Esercizio 3 Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dipendente dal parametro reale k.

a) Determinare gli autovalori quando $k = 1$.

b) Determinare i valori di k per i quali gli autovalori sono tutti reali.

c) Determinare i valori di k per i quali A è diagonalizzabile.

d) Determinare gli eventuali valori di k per i quali A è simile alla matrice $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4 Nello spazio sono dati la retta $r : \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ e il piano $\pi : x - y + z = 0$.

a) Determinare equazioni cartesiane della retta r' proiezione ortogonale di r su π.

b) Determinare l'equazione cartesiana di una sfera di raggio $\sqrt{3}$ con centro sulla retta r e tangente a π. Tale sfera è unica ?

c) Determinare equazioni (cartesiane o parametriche) della retta r'' che giace sul piano π ed è ortogonale a r.

Esercizio 5 È data la conica $\gamma : 2x^2 + 2y^2 + 2kxy - 1 = 0$ dipendente dal parametro reale $k \geq 0$.

a) Determinare la forma canonica di γ al variare di k e disegnare la conica nel caso in cui è degenere.

b) Disegnare la conica γ_0 ottenuta per il valore $k = 0$, e trovare l'equazione di una retta tangente a γ_0 e parallela alla retta $x - y = 0$.

c) Determinare il valore di k per il quale γ_k è un ellisse di area π. (Nota: l'area dell'ellisse di semiassi a, b è πab). In generale, se γ_k è un'ellisse, quali valori può assumere l'area di γ_k?

Esercizio 6 a) Discutere le soluzioni del seguente sistema lineare al variare del parametro reale k:

$$\begin{cases} x + 2y - z = k \\ 4x + 4ky - k^2 z = 2 \end{cases}$$

b) Sono dati i punti $A = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $B = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$. Trovare la matrice della rotazione di centro l'origine che porta A in B (in senso antiorario).

c) Dati i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, determinare una base dell'immagine dell'endomorfismo di $\mathbf{R}^2$ tale che $f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_2$.