Soluzioni Test 3

January 15, 2019

Esercizio 1. Consideriamo la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

e l'endomorfismo $f : \mathbf{Mat}(2 \times 2) \to \mathbf{Mat}(2 \times 2)$ definito da

$$f(A) = AN, \qquad \forall A \in \mathbf{Mat}(2 \times 2)$$

(a) Determinare la matrice associata all'endomorfismo f nella base canonica $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ di $\mathbf{Mat}(2 \times 2)$.

(b) Calcolare una base di $\mathrm{Ker} f$ e una base di $\mathrm{Im} f$.

(c) È possibile che una applicazione lineare $g : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ sia iniettiva? Giustificare la risposta in modo esaustivo.

Soluzione.

Parte (a). Per trovare la matrice associata ad f nella base $\mathcal{B}$ dobbiamo prendere gli elementi di $\mathcal{B}$, trasformarli tramite l'endomorfismo f ed esprimere i trasformati come combinazioni lineari degli elementi di $\mathcal{B}$:

$$f(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (E_{11} + E_{12})$$

$$f(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -2(E_{11} + E_{12})$$

$$f(E_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (E_{21} + E_{22})$$

$$f(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = -2(E_{21} + E_{22})$$

Pertanto la matrice associata ad f nella base $\mathcal{B}$ è:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Parte (b). Cominciamo con il determinare l'immagine dell'endomorfismo f. Sappiamo che l'immagine di f è generata dai trasformati dei vettori di una base, ovvero

$$\mathrm{Im} f = L[f(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}] = L\Big[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\Big].$$

Eliminando i generatori inutili vediamo che si ha anche:

$$\mathrm{Im} f = L\Big[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\Big];$$

essendo linearmente indipendenti, i vettori $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ formano una base dell'immagine di f. Per determinare il nucleo osserviamo che

$$f\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},$$

dunque

$$f\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y & x-2y \\ z-2w & z-2w \end{pmatrix}.$$

Ponendo $f\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e risolvendo il sistema, otteniamo ∞^2 soluzioni, e una base di $\mathrm{Ker} f$ è data dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Parte (c). Utilizzando il Teorema della Dimensione ci accorgiamo che, qualsiasi sia $g : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$, deve risultare:

$$\dim \mathrm{Im} g + \dim \mathrm{Ker} g = \dim \mathbf{R}^4 = 4;$$

tuttavia poiché $\mathrm{Im} g$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ risulta che $\dim(\mathrm{Im} g) \leq 2$. Dunque:

$$\dim(\ker(g)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\mathrm{Im} g) \geq 4 - 2 = 2$$

Ne segue che non esistono applicazioni lineari iniettive da $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi vettoriali:

$$V = L\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right], \quad W : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Calcolare la dimensione di W e determinarne una base ortogonale (se esiste).

(b) Calcolare la dimensione di $V^\perp$ e determinarne una base.

(c) Calcolare la dimensione e determinare delle basi dei seguenti sottospazi: $V \cap W$ e $V + W$. La somma $V + W$ è una somma diretta?

Soluzione.

Parte (a). Innanzitutto osserviamo che dato uno spazio vettoriale di dimensione finita, tutti i suoi sottospazi sono necessariamente di dimensione finita e inferiore o uguale alla dimensione dello spazio stesso. Sappiamo anche che ogni spazio vettoriale di dimensione finita ammette una base. Concludiamo dato un qualunque sottospazio W di $\mathbb{R}^4$, esiste una base $\mathcal{B}$ di W. Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt nel caso in cui $W \neq \{0\}$ possiamo rendere una tale base ortogonale.

Il sottospazio W è presentato come l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = O$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

La matrice A ha rango 2, come si vede facilmente calcolando il determinante del minore $\mu_{12,12}$. Pertanto il Teorema di Rouché-Capelli ci dice che lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = O$ è uguale a 2. Per trovare una base di W risolviamo il sistema che lo definisce. Un base risulta essere:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Applichiamo ora il procedimento di Gram-Schmidt sui vettori:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

prendiamo quindi $w_1' = w_1$ e $w_2' = w_2 - \frac{\langle w_2, w_1' \rangle}{\langle w_1', w_1' \rangle} w_1'$, ovvero

$$w_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dunque (w_1', w_2') è una base ortogonale di W.

Parte (b). Ricordiamo che dato un sottospazio V è ben definito il suo complemento ortogonale, cioè il sottospazio dato da

$$V^\perp = \{w : \langle v, w \rangle = 0, \forall v \in V\}$$

Per la linearità del prodotto scalare nei due argomenti, fissata una base $\mathcal{B}$ di V, risulta che

$$V^\perp = \{w : \langle v, w \rangle = 0, \forall v \in \mathcal{B}\}$$

Poiché i vettori che generano V sono linearmente indipendenti (come si osserva verificando che il determinante del minore $\mu_{234,123}$ è non nullo). In particolare risulta che $\dim(V) = 3$ e dunque $\dim(V^\perp) = 1$. Per quanto detto precedentemente $V^\perp$ è lo spazio delle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$S : \begin{cases} \langle X, v_1 \rangle = 0 \\ \langle X, v_2 \rangle = 0 \\ \langle X, v_3 \rangle = 0 \end{cases} \quad \text{dove} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, , v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $X \in V^\perp \iff X \in Sol(S)$:

$$X \in Sol(S) \iff \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = -x_2 \\ x_4 = 2x_2 \end{cases} \iff X \in L\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right]$$

Parte (c). Poiché $\dim V + \dim W = 5$ la formula di Grassmann ci dice che $\dim(V \cap W) \neq 0$. Ne segue che, in ogni caso, la somma $V + W$ non è diretta.

Cominciamo con il determinare $V + W$. Per definizione

$$V + W = L\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

Calcoliamo i determinanti delle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

Ne segue che i primi quattro vettori della collezione sono linearmente indipendenti e formano pertanto una base di $V + W = \mathbb{R}^4$.

Infine, avendo determinato $V^\perp$ è facile trovare le equazioni cartesiane di V:

$$V = \{v \in \mathbb{R}^4 \,|\, \langle v, u\rangle = 0\} \quad \text{dove} \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ovvero l'equazione cartesiana di V è:

$$V : x_1 - x_2 - 2x_4 = 0$$

Ne segue che $V \cap W$ è dato dalle equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x_2 + 2x_4 \\ 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -3x_2 \\ x_4 = -2x_2 \\ x_3 = x_2 \end{cases}$$

Quindi il sottospazio $V \cap W$ ammette la seguente descrizione:

$$V \cap W = L\left[\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right]$$

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$$

(a) Determinare gli autovalori di A_1.

(b) Determinare i valori di k per i quali gli autovalori di A_k sono tutti reali.

(c) Determinare i valori di k per i quali A_k risulta diagonalizzabile.

(d) Determinare gli eventuali valori di k per cui A_k risulta simile alla matrice:

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Soluzione.

Parte (a). Calcoliamo il polinomio caratteristico di A_k per ogni valore $k \in \mathbb{R}$, dopodiché troveremo la soluzione andando ad osservare il polinomio per $k = 1$.

$$p_{A_k}(x) = \det(A_k - xI) = [(1+x)x - 2] \cdot [x^2 - k]$$

Per $k = 1$ il polinomio $p_{A_1}(x)$ può essere fattorizzato come segue:

$$p_{A_1}(x) = (x-1)^2(x+1)(x+2)$$

Dunque gli autovalori di A_1 sono $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$.

Parte (b). Affinché il polinomio caratteristico possa essere fattorizzato come prodotto di polinomi di grado 1 a coefficienti reali (condizione equivalente a possedere tutti autovalori reali) è necessario e sufficiente che $k \geq 0$. In questo caso infatti (e solo in questo caso) possiamo scrivere

$$p_{A_k}(x) = (x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k})(x-1)(x+2)$$

con $\pm\sqrt{k} \in \mathbb{R}$.

Parte (c). Cominciamo osservando che per $k \neq 0, 1, 4$ gli autovalori della matrice A_k sono tutti distinti. Poiché possedere n autovalori distinti è condizione sufficiente per la diagonalizzabilità se ne deduce che per tali valori di k, la matrice A_k è diagonalizzabile. I valori $k = 0, 1, 4$ vanno quindi studiati uno per uno, andando a verificare la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore che appare con molteplicità doppia.

Caso $k = 0$. Per A_0 risulta che l'autovalore di molteplicità doppia è $\lambda = 0$. Andando a calcolarci l'autospazio vediamo che:

$$X \in E(0) \iff A_0 X = O \iff \begin{cases} 2x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \iff X \in L[e_4]$$

Pertanto per $k = 0$ abbiamo che $\dim(E(0)) = 1 < 2 = MA(0)$ e dunque A_0 non è diagonalizzabile.

Caso $k = 1$. Per A_1 l'autovalore di molteplicità algebrica 2 è $\lambda = 1$. Andiamo dunque a studiare $E(1)$:

$$X \in E(1) \iff (A_1 - I)X = O \iff \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \iff X \in L[(2e_1 + e_2), (e_3 + e_4)]$$

In questo caso quindi $\dim E(1) = MA(1) = 2$, mentre gli autovalori -1 e -2 hanno molteplicità 1 e dunque la matrice A_1 è diagonalizzabile.

Caso $k = 4$. Per $k = 4$ l'autovalore di molteplicità doppia è $\lambda = -2$. Andiamo quindi a studiare il relativo autospazio:

$$X \in E(-2) \iff (A_4 + 2I)X = O \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \iff X \in L[(e_1 - e_2), (-2e_3 + e_4)]$$

Come nel caso $k = 1$, la dimensione dell'autospazio relativo all'unico autovalore di molteplicità doppia di A_4 è uguale a due, e dunque la matrice A_4 è diagonalizzabile.

Parte (d). Osserviamo che A_k è simile alla matrice D se e solo se A_k è diagonalizzabile e se i suoi autovalori sono -2, 1, 3, -3. Poichè gli autovalori di A_k per $k \geq 0$ sono i numeri reali $\pm\sqrt{k}$, 1, -2 tale condizione è verificata per $k = 9$.

Esercizio 4. Siano dati nello spazio la retta r e il piano π rispettivamente determinati da:

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad \pi : x - y + z = 0$$

(a) Determinare le equazioni della retta r' proiezione ortogonale di r su π.

(b) Determinare l'equazione cartesiana di una sfera centrata su un punto della retta r, tangente a π e di raggio $\sqrt{3}$.

(c) Determinare le equazioni (cartesiane o parametriche) della retta r'' contenuta in π, ortogonale ad r e passante per O.

Soluzione.

Parte (a). Usando il metodo del fascio di piani vediamo che il piano contenente r e perpendicolare al piano π ha equazione $\pi' : 2x - y - 3z = 0$. La retta cercata ha dunque equazioni cartesiane:

$$r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

ed equazioni parametriche:

$$r' : \begin{cases} x = 4t \\ y = 5t \\ z = t \end{cases}$$

Parte (b). Il punto mobile sulla retta r ha coordinate $C = (2t, t, t)$; la sfera è tangente al piano π se e solo se la distanza del centro dal piano è uguale al raggio. Dunque dobbiamo imporre $d(C, \pi) = \sqrt{3}$. Svolgendo i calcoli otteniamo $t = \pm\frac{3}{2}$. Vi sono dunque due sfere di raggio $\sqrt{3}$ tangenti a π con centro su r:

$$S_{\sqrt{3}} : \left(x - 3\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = 3$$

$$S_{-\sqrt{3}} : \left(x + 3\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = 3$$

Parte (c). La retta r'' si ottiene come intersezione del piano π, di equazione $x - y + z = 0$, con il piano per l'origine perpendicolare a r, di equazione $2x + y + z = 0$. Dunque le equazioni cartesiane della retta r'' sono:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 5. Sia data la conica

$$\gamma_k \ : \ 2x^2 + 2y^2 + 2kxy + 1 = 0$$

dipendente dal parametro reale $k \geq 0$.

(a) Determinare la forma canonica di γ_k al variare di k e disegnare la conica nel caso in cui è degenere.

(b) Disegnare la conica γ_0 ottenuta per il valore $k = 0$, e trovare l'equazione di una retta tangente a γ_0 e parallela alla retta $x - y = 0$.

(c) Determinare per quali valori di k la conica γ_k è un'ellisse di area π. (*Suggerimento*: si ricordi che l'area di un'ellisse di semiassi a e b è πab). In generale, se γ_k è un'ellisse, quali valori può assumere l'area di γ_k?

Soluzione.

Parte (a). Per cominciare calcoliamo la matrice della conica e della sua parte principale:

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & k & 0 \\ k & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q_k = \begin{pmatrix} 2 & k \\ k & 2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo i determinanti di A_k e Q_k e la traccia di Q_k:

$$\det(Q_k) = 4 - k^2, \operatorname{tr}(Q_k) = 4, \det(A_k) = -\det(Q_k) = k^2 - 4$$

Dunque la conica γ_k è una conica generale di tipo I per $k \neq 2$, mentre per $k = 2$ la conica è una parabola degenere. Osserviamo che gli autovalori di Q_k sono $\lambda_k = 2 - k, \mu_k = 2 + k$. Il teorema di invarianza quindi ci dice che per $k \neq 2$ l'equazione canonica della conica γ_k è

$$(2 - k)X^2 + (2 + k)Y^2 - 1 = 0$$

Si tratta dunque di un'ellisse reale di semiassi $a = 1/\sqrt{2-k}$, $b = 1/\sqrt{2+k}$ per $k \in [0, 2)$ e di un'iperbole per $k \in (2, +\infty)$.

Analizziamo ora il caso $k = 2$. In questo caso $\det(A_2) = \det(Q_2) = 0$ e dunque l'equazione canonica sarà della forma:

$$4Y^2 + r = 0$$

Siamo dunque di fronte ad una parabola degenere, ovvero ad una coppia di rette parallele (distinte, coincidenti o immaginarie a seconda che $r < 0, r = 0, r > 0$). Andando ad osservare l'equazione di γ_k nel riferimento iniziale $(O; x, y)$ vediamo che:

$$\gamma_2 : 2x^2 + 2y^2 + 4xy - 1 = 0 \iff 2 \cdot \left(x + y + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(x + y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

Abbiamo dunque scoperto che γ_2 è la coppia di rette parallele distinte:

$$\left(x + y + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(x + y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

Si osservi che, come suggerito dalla teoria, le due rette sono paralle all'autospazio $E(0)$ di Q_2.

In generale, per determinare il tipo di coppia di rette al quale ci troviamo di fronte la procedura è la seguente: trovare l'equazione cartesiana dell'autospazio E(0). Normalizzare l'equazione della conica di modo che uno dei coefficienti dei termini in x^2 o y^2 sia uguale ad 1. Normalizzare alla stessa maniera l'equazione dell'autospazio $E(0)$: supponiamo di aver normalizzato γ_k dividendo per il coefficiente di x^2 e che $x + by = 0$ sia l'equazione cartesiana di $E(0)$ normalizzata. Moltiplicare due fasci di rette parallele all'equazione trovata: $(x + by + h_1)(x + by + h_2)$. Eguagliare il polinomio così trovato al polinomio che compare nell'equazione normalizzata della conica. Cercare delle soluzioni in h_1 e h_2. Se tali soluzioni esistono e sono distinte siamo di fronte ad una coppia di rette parallele distinte, se esistono ma sono coincidenti, siamo di fronte ad una coppia di rette parallele coincidenti, se non esistono siamo di fronte ad una coppia di rette immaginarie.

Parte (b). L'equazione della conica γ_0 è:

$$\gamma_0 : x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$$

ovvero la circonferenza di centro O e raggio $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Cerchiamo

$$r_h : x - y + h = 0$$

tangente a γ_0. Affinché r_h sia tangente a γ_0 dovra' risultare che la distanza di r_h dal centro della circonferenza sia uguale al raggio. Imponendo tale condizione (cioè $d(r_h, O) = \frac{\sqrt{2}}{2}$) otteniamo due valori di h, ovvero $h = \pm 1$. Otteniamo le rette

$$r_1 : x - y - 1 = 0, \quad r_{-1} = x - y + 1 = 0$$

.

Potevamo anche procedere come segue. Osserviamo che, essendo γ_0 una circonferenza di centro l'origine e raggio $\frac{\sqrt{2}}{2}$ i suoi punti hanno coordinate:

$$P_\vartheta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \end{pmatrix}$$

Inoltre i punti di tangenza devono essere i punti in cui il vettore direttore della retta r è ortogonale al vettore P_ϑ. In altre parole i punti di tangenza devono risolvere l'equazione:

$$P_\vartheta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff \cos(\vartheta) + \sin(\vartheta) = 0 \iff \vartheta = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

Dunque i punti di tangenza sono $P_{3\frac{\pi}{4}}$ e $P_{\frac{7\pi}{4}}$. Imponendo quindi il passaggio per tali punti troviamo:

$$r_1 : x - y - 1 = 0, \quad r_{-1} = x - y + 1 = 0$$

tangenti rispettivamente in $P_{\frac{3\pi}{4}}$ e $P_{\frac{5\pi}{4}}$.

Parte (c). Abbiamo già osservato che γ_k, è un'ellisse reale per $k \in [0, 2)$. Per tali valori di k i due semiassi sono:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2-k}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2+k}}$$

Utilizzando la formula dell'area dell'ellisse troviamo:

$$\frac{\pi}{\sqrt{4-k^2}} = \pi \iff 4 - k^2 = 1 \iff k = \pm\sqrt{3}$$

dovendo utilizzare solamente i valori positivi di k troviamo quindi $k = \sqrt{3}$. Per quanto riguarda l'ultima domanda della Parte (c), ci viene richiesto di studiare la funzione:

$$f(k) = \frac{\pi}{\sqrt{4-k^2}}$$

Tale funzione è ben definita e crescente per $k \in [0,2)$ ed ha un asintoto verticale per $k = 2$, approcciando il quale la funzione tende a $+\infty$. Quindi il minimo di tale funzione è raggiunto per $k = 0$ ed è dunque uguale a $\frac{\pi}{2}$. Quindi

$$\{\mathcal{A}(\gamma_k) \ : \ k \in [0,2)\} = \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$$

.

Esercizio 6.

(a) Discutere le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y - z = k \\ 4x + 4ky - k^2 z = 2 \end{cases}$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

(b) Siano dati i punti $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $B = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Trovare la matrice di rotazione che fissa l'origine e manda A in B in senso antiorario.

(c) Dati i vettori $v_1 = (1,1)^t$,$v_2 = (2,-1)^t$,$w_1 = (1,-2)^t$,$w_2 = (2,6)^t$,determinare una base dell'immagine dellendomorfismo f di $\mathbb{R}^2$ tale che $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$.

Soluzione.
Parte (a). La matrice del sistema è

$$A'_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & k \\ 4 & 4k & -k^2 & 2 \end{pmatrix}$$

Sia A_k la matrice dei coefficienti. Osserviamo che $\mathrm{rk}(A_k) \geq 1$ e che $\mathrm{rk}(A_k) = 1$ se e solo se $k = 2$. Per $k = 2$ tuttavia risulta che $\mathrm{rk}(A'_k) = 2$ e dunque per $k = 2$ il sistema è incompatibile. Supponiamo dunque $k \neq 2$. In tal caso il Teorema di Rouché-Capelli ci dice che avremo uno spazio di soluzioni di dimensione 1. Risolvendo il sistema per sostituzione troviamo:

$$\begin{cases} y = \frac{(k-1/2)}{(2-k)} + \frac{(1-(k/2)^2))}{(2-k)} z \\ x = \frac{1}{2} - k\,\frac{(k-1/2)}{(2-k)} + \left[(k/2)^2 - k\,\frac{(1-(k/2)^2)}{(2-k)}\right] z \end{cases}$$

Parte (b). I punti A e B si trovano sulla circonferenza unitaria e le loro coordinate ci dicono che:

$$A = (\cos(\pi/3), \sin(\pi/3))^t, \quad B = (\cos(7\pi/6), \sin(7\pi/6))^t$$

Dunque la rotazione è:

$$R_{\frac{5\pi}{6}} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Parte (c) Osserviamo che i vettori w_1 e w_2 sono proporzionali. Poichè v_1, v_2 formano una base di $\mathbb{R}^2$ l'immagine di f si ottiene considerando tutte le combinazioni lineari dei vettori $f(v_1), f(v_2)$, ovvero di w_1 e w_2. Quindi $\mathrm{Im}(f) = L[w_1]$.