A.A.2018-2019 — GEOMETRIA
CDL IN INGEGNERIA MECCANICA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA CIVILE ED INDUSTRIALE
SOLUZIONI TEST 4

Esercizio (1). Sia γ la conica di equazione:

$$\gamma : 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 8x + 3 = 0.$$

(a) Verificare che la conica è un'ellisse e determinarne la forma canonica.
(b) Siano F_1, F_2 i fuochi dell'ellisse γ. Calcolare l'area massima di un triangolo di vertici F_1, F_2, P, dove $P \in \gamma$. (*Suggerimento:* si ricordi che per l'ellisse in forma canonica $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ con $a \geq b$ le coordinate dei fuochi sono date da $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$.)
(c) Siano Q_1, Q_2 le intersezioni di γ con l'asse x. Calcolare il perimetro di ciascuno dei due triangoli di vertici, rispettivamente, F_1, F_2, Q_1 e F_1, F_2, Q_2.

Soluzione.

Parte (a). Allo scopo di determinare che tipo di conica sia γ e la sua equazione canonica andiamo a calcolarci la sua matrice e la matrice della sua parte principale. Abbiamo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Un conto diretto mostra che:

$$\det(A) = -24, \quad \det(Q) = 8, \quad \mathrm{Tr}(Q) = 6$$

Date la traccia e il determinante di Q possiamo calcolarci gli autovalori di Q:

$$\lambda = 2, \quad \mu = 4.$$

Dunque l'equazione della conica γ nel sistema di riferimento cartesiano canonico per la conica sarà della forma:

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + p = 0$$

con $p \in \mathbb{R}$ da determinarsi attraverso il Teorema di Invarianza. In effetti andando a eguagliare il determinante della matrice che esprime la conica γ nel sistema di riferimento cartesiano canonico con il determinante della matrice A, ovvero la matrice associata alla conica γ nel sistema di riferimento originario, scopriamo che:

$$8p = -24 \iff p = -3$$

Pertanto l'equazione canonica della conica γ è:

$$\left(\frac{2}{3}\right) X^2 + \left(\frac{4}{3}\right) Y^2 = 1$$

Dunque γ è un'ellisse di semiassi $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$ e $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Parte (b). Seguendo il suggerimento osserviamo che i fuochi F_1, F_2 dell'ellisse γ hanno coordinate $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ nel riferimento canonico. D'altra parte se P è un punto dell'ellisse le sue coordinate, sempre rispetto al sistema di riferimento canonico, sono $P_\vartheta = (\sqrt{\frac{3}{2}}\cos(\vartheta), \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\vartheta))$. Calcoliamo l'area del triangolo $F_1 \overset{\triangle}{P_\vartheta} F_2$ scegliendo come base $\overline{F_1F_2}$. In tal caso l'altezza è fornita precisamente dall'ordinata del punto P e dunque:

$$\mathcal{A}\left(F_1 \overset{\triangle}{P_\vartheta} F_2\right) = \frac{1}{2} \cdot d(F_1, F_2) \cdot \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\vartheta)\right| = \frac{3}{4} \cdot |\sin(\vartheta)|$$

Quindi al variare di $P_\vartheta \in \gamma$ abbiamo che:

$$\max_{P_\vartheta \in \gamma} \mathcal{A}\left(F_1 \overset{\triangle}{P_\vartheta} F_2\right) = \max_{\vartheta \in [0,2\pi)} \frac{3}{4} \cdot |\sin(\vartheta)| = \frac{3}{4}$$

and the maximum is attained for $\vartheta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

Parte (c). Ricordiamo che per definizione l'ellisse di fuochi F_1 ed F_2 e semi-asse maggiore di lunghezza a è il luogo geometrico dei punti del piano tali che la somma delle distanze dai fuochi eguaglia $2a$. Quindi si ha che per ogni punto $P_\vartheta = (a\cos(\vartheta), b\sin(\vartheta)) \in \gamma$ il perimetro del triangolo $F_1 \overset{\triangle}{P_\vartheta} F_2$ è:

$$\mathcal{P}\left(F_1 \overset{\triangle}{P_\vartheta} F_2\right) = d(F_1, F_2) + d(P_\vartheta, F_1) + d(P_\vartheta, F_2) =$$

$$= \sqrt{3} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \cdot (1 + \sqrt{2})$$

□

Esercizio (2). Nello spazio sono dati i punti $A = (1, 1, 1)^t$, $B = (2, 0, 1)^t$ e il piano di equazione cartesiana

$$\pi : x + y + z = 0$$

(a) Determinare l'equazione del piano π' contenente A, B e perpendicolare a π.
(b) Determinare l'equazione della sfera di centro A e tangente al piano π e le coordinate del punto di tangenza.
(c) Sia $p_\pi : V^3_O \to \pi$ la proiezione ortogonale sul piano π. Calcolare l'area del quadrilatero $ABp_\pi(B)\pi_\pi(A)$ e stabilire se tale quadrilatero è rettangolo oppure no.

Soluzione.

Parte (a). Procediamo come segue: scriviamo il fascio di piani di asse la retta r passante per A e B e imponiamo la condizione di ortogonalità a π. Cominciamo quindi con il determinare le equazioni cartesiane di r. Le equazioni parametriche sono:

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{cases}$$

da cui deduciamo le seguenti equazioni cartesiane:

$$r : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

Dunque il fascio di piani di asse r ha la seguente equazione:

$$\pi_{h,k} : h(x + y - 2) + k(z - 1) = 0 \iff \pi_{h,k} : hx + hy + kz - (2h + k) = 0$$

La condizione di ortogonalità tra π e π' ci fornisce la seguente equazione tra i parametri di giacitura del fascio di piani $\pi_{h,k}$ e π:

$$\begin{pmatrix} h \\ h \\ k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff 2h + k = 0 \iff k = -2h$$

Scegliamo $h = 1$ e troviamo:

$$\pi' = \pi_{1,-2} : x + y - 2z = 0$$

Un metodo alternativo poteva essere quello di imporre l'ortogonalità dei parametri di giacitura del piano incognito con quelli del piano π e il passaggio per i punti A e B.

Parte (b). La sfera di centro A e tangente al piano π avrà come punto di tangenza la proiezione su π di A. Determiniamo quindi la proiezione ortogonale di A su π. Osserviamo che $\vec{OA}$ è ortogonale al piano π, passante per O. Pertanto la proiezione ortogonale di A su π è proprio O. La sfera per A tangente a π è dunque la sfera di equazione cartesiana:

$$S : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 3$$

dove $3 = \|\vec{OA}\|^2$. Il punto di tangenza di S con π è proprio il punto O.

Parte (c). Osserviamo che il vettore $\vec{AB}$ ha coordinate $(1, -1, 0)^t$, e dunque la retta r su cui giacciono i punti A e B è parallela a π. Ne segue che il quadrilatero $ABp_\pi(B)p_\pi(A)$ ha due lati di lunghezza $\sqrt{3}$ ortogonali al lato $\overline{p_\pi(A)p_\pi(B)}$. Ne deduciamo che il quadrilatero in questione è un rettangolo. Per determinare la sua area ci basta quindi calcolare $d(A, B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{2}$ e moltiplicare il risultato per $d(O, A) = \|\vec{OA}\| = \sqrt{3}$ ottenendo $\mathcal{A}(ABp_\pi(B)p_\pi(A)) = \sqrt{6}$. □

Esercizio (3). Data $\mathcal{C} = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, base canonica (ordinata) di $\mathbb{R}^3$, si considerino i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ tali che:

$$\begin{cases} \underline{v}_1 = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \\ \underline{v}_2 = \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \\ \underline{v}_3 = \underline{e}_3 \end{cases}$$

(a) Si esprimano $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ in funzione di $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$.
(b) Si stabilisca se $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$. In caso affermativo determinare la matrice M di passaggio da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$ e la sua inversa.
(c) Si determini la dimensione dei sottospazi E, F di $\mathbb{R}^3$ definiti come:

$$E = L[\underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{e}_1, \underline{e}_3], F = L[\underline{e}_2, \underline{e}_3] \cap L[\underline{v}_2, \underline{v}_3]$$

Soluzione.

Parte (a). Osserviamo che

$$\underline{e}_1 = \underline{v}_1 - \underline{v}_2 + \underline{v}_3$$

e che

$$\underline{e}_2 = \underline{v}_2 - \underline{v}_3$$

mentre $\underline{e}_3 = \underline{v}_3$.

Parte (b). Innanzitutto si osservi che dalla parte (a) segue che i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ generano $\mathbb{R}^3$. Essendo un insieme di generatori di cardinalità identica alla dimensione dello spazio vettoriale di appartenenza ne deduciamo che sono anche linearmente indipendenti e dunque una base di $\mathbb{R}^3$. Ricordiamo ora che per definizione la matrice M di passaggio da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$ è la matrice tale che:

$$(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)M$$

Utilizzando il dato del problema (ovvero la scrittura di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ in termini della base canonica) troviamo che:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Similmente, utilizzando la parte (a) possiamo scrivere:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Parte (c). Osserviamo che $L[\underline{v}_2, \underline{v}_3] = L[\underline{e}_2, \underline{e}_3]$, pertanto la dimensione di F è uguale alla dimensione di $L[\underline{e}_2, \underline{e}_3]$ cioè 2. Per quanto riguarda E osserviamo che $\underline{e}_3 = \underline{v}_3$ quindi

$$E = L[\underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{e}_1].$$

D'altra parte segue da quanto visto per F che

$$E = L[\underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{e}_1] = L[\underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_1] = \mathbb{R}^3$$

e dunque $\dim(E) = 3$. □

Esercizio (4). Sia $\mathcal{C}$ la base canonica (ordinata) di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$ la base ottenuta nell'esercizio precedente. Sia ora f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ avente per autovettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ associati rispettivamente agli autovalori

(a) Si determini una base di $\ker(f)$ ed una di $\ker(f)^\perp$.
(b) Si stabilisca se f è diagonalizzabile e si calcoli $f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3)$.
(c) Si determini la matrice canonica A dell'endomorfismo f e stabilire se essa è simile alla matrice $2E_{22}$. (Si ricordi che la matrice E_{ij} è la matrice le cui entrate sono tutte nulle ad eccezione dell' entrata di posto (i, j) che è uguale ad 1.)

Soluzione.

Parte (a). Osserviamo che, essendo f un omomorfismo e $\mathcal{B}$ una base, risulta che $\mathrm{Im}(f) = L[\underline{v}_2, \underline{v}_3]$ e che $\ker(f) = L[\underline{v}_1]$. Infatti l'immagine di f certamente contiene $L[\underline{v}_2, \underline{v}_3]$ così come il nucleo di f deve contenere $L[\underline{v}_1]$. Ma allora il Teorema della dimensione ci dice che le inclusioni sono in realtà delle uguaglianze. Per quanto riguarda $\ker(f)^\perp$ risulta che $\underline{v}_3$ è ortogonale a $\underline{v}_1$, così come il vettore $\underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 + 2\underline{v}_3$. Dunque

$$\ker(f)^\perp = L[\underline{v}_3, \underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 + 2\underline{v}_3].$$

Parte (b). Ricordiamo che un endomorfismo f di uno spazio vettoriale V è diagonalizzabile se e soltanto se ammette una base di autovettori. È il caso dell'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che stiamo esaminando: la base $\mathcal{B}$ è una base di autovettori per f. L'immagine tramite f del vettore $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3$ è il vettore $2\underline{v}_2 + 2\underline{v}_3$.

Parte (c). Vi sono due possibili modi per determinare la matrice canonica di f. Uno di essi è quello di utilizzare le matrici di passaggio dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$ e la sua inversa. In effetti la matrice che esprime f nella base $\mathcal{B}$ è di forma diagonale:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e dunque la matrice canonica di f è la matrice:

$$A = MDM^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice A evidentemente non può essere simile alla matrice

$$D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Infatti gli autovalori di A sono 0 e 2 con molteplicità algebrica rispettivamente 1 e 2 mentre quelli di D' sono 0 e 2 ma con molteplicità algebrica 2 ed 1. Poiché gli autovalori e le loro molteplicità algebriche sono inviarianti per similitudine ne deudciamo che A e D' non sono matrici simili.

□

Esercizio (5). Siano dati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$, dipendenti deal parametro $k \in \mathbb{R}$

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ h-1 \\ h^2-1 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ h-1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e si consideri la matrice $A_h = (\underline{v}_1 \underline{v}_2 \underline{v}_3)$.

(a) Calcolare il rango di A_h al variare di $h \in \mathbb{R}$.
(b) Calcolare la dimensione del sottospazio $E_h = L[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

(c) Determinare, qualora possibile, un sottospazio F di $\mathbb{R}^4$ tale che:

$$\dim(F) = 2, \quad F \cap E_h = \{0\}, \ \ \forall h \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

Parte (a). Cominciamo con l'osservare che il rango della matrice A_h è sempre minore o uguale a 3 (ovvero il numero di colonne di A_h) e che le prime due righe di A_h sono uguali, per qualsiasi valore di $h \in \mathbb{R}$. Dunque ne concludiamo che il rango di A_h è sempre uguale al rango del suo minore $\mu_{234,123}(h)$. Ora essendo il minore in questione una matrice quadrata andiamo a calcolare il suo determinante:

$$\det(\mu_{234,123}(h)) = (h^2 - 1)(1 - h)$$

Dunque $\text{rank}(A_h) = 3$ per qualsiasi scelta di $h \neq \pm 1$. Per $h = 1$ la matrice diventa:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque $\text{rank}(A_1) = 1$. Per $h = -1$ la matrice è invece uguale a

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui rango è $\text{rank}(A_{-1}) = 2$.

Parte (b). Dalla teoria sappiamo che il rango di una matrice è uguale alla dimensione dello spazio generato dalle sue colonne. Ne concludiamoc che $\dim(E_h) = 3$ per ogni $h \neq \pm 1$, $\dim(E_1) = 1$ e $\dim(E_{-1})$=2.

Parte (c). Supponiamo per assurdo che un tale sottospazio esista. Per la formula di Grassman avremmo allora:

$$4 \leq \dim(E_h + F) = \dim(E_h) + \dim(F)$$

per ogni valore di h. Ma per $h \neq \pm 1$ la somma a destra è uguale a 5, ottenendo così la conclusione assurda $4 \geq 5$. Dunque un tale sottospazio F non esiste. □

Esercizio (6). Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canoncia di $\mathbb{R}^3$.

(a) Si determini una base di $\ker(T)$ e di $\text{Im}(T)$.
(b) Si scriva il polinomio caratteristico di A e si stabilisca se T è o meno diagonalizzabile.

(c) Sia A' la matrice associata all'endomorfismo T rispetto alla base (ordinata) $\mathcal{B} = (\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3)$ dove
$$\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Stabilire se A' è diagonalizzabile e calcolare $\mathrm{Tr}(A')$, $\det(A')$.

Soluzioni.

Parte (a). Osserviamo che la colonna A^3 (la terza colonna della matrice A) è somma di A^1 e A^2 (ovvero le prime due colonne), e che A^1, A^2 sono linearmente indipendenti non essendo l'una multiplo dell'altra. Ma allora, essendo l'immagine di T uguale al sottospazio generato dalle colonne abbiamo che $\mathrm{Im}(T) = L[A^1, A^2]$. D'altra parte l'uguaglianza $A^3 = A^1 + A^2$ ci dice che il vettore di coordinate $(1, 1, -1)^t$ viene inviato da T nel vettore nullo. Per il Teorema della dimensione, sapendo le dimensioni di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathrm{Im}(T)$ concludiamo che $\dim(\ker(T)) = 1$ e dunque che $\ker(T) = L[(1, 1, -1)^t]$.

Parte (b). Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:
$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \,\mathrm{Id}) \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 3 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -3 & -2-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= -(1+\lambda)[(1-\lambda)(-2-\lambda)+3] + 3 - 2(1-\lambda) =$$
$$= -\lambda^3 - 2\lambda^2 = -\lambda^2(\lambda+2)$$
Dunque la matrice A ha due autovalori: $\lambda_1 = 0$ di molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = -2$ di molteplicità algebrica 1. Affinché T sia diagonalizzabile è necessario che per ciascun autospazio di A la molteplicità algebrica del corrispettivo autovalore eguagli la dimensione dell'autospazio. Ma l'autospazio relativo all'autovalore nullo di A è proprio il nucleo dell'endomorfismo T, la cui dimensione è uguale ad 1, come osservato nella Parte (a). Ne concludiamo che T non è diagonalizzabile.

Parte (c) Osserviamo che la matrice A' per definizione rappresenta T in una base $\mathcal{B}$ diversa dalla base canonica. Dunque esiste una matrice M tale che
$$M^{-1}A'M = A$$
ovvero le matrici A ed A' sono matrici simili. In particolare A' non può essere diagonalizzabile altrimenti lo sarebbe anche A: infatti se fosse $P^{-1}A'P = D$ per una opportuna matrice diagonale D ed una matrice P invertibile, allora si avrebbe anche $(MP)^{-1}A(MP) = D$. Infine, traccia e determinante di una matrice quadrata sono inviarianti per similitudine, dunque per calcolare $\mathrm{Tr}(A')$ e $\det(A')$ è sufficiente calcolare i medesimi sulla matrice A. Ma la matrice A ha nucleo, dunque $\det(A) = 0$, mentre la sua traccia è $\mathrm{Tr}(A) = -2$. $\square$