Corso di Geometria, a.a. 2012-2013
Ing. Meccanica A-E, Ing. Ambiente e Territorio
Test 2

Il test consiste di sei esercizi, e ha la durata di tre ore. Rispondere negli spazi predisposti, e giustificare le risposte in modo chiaro e conciso (se occorre, usare il retro del foglio). Risposte senza spiegazione non riceveranno credito. Le soluzioni saranno discusse in classe.

Esercizio 1. Siano v_1, v_2, v_3, v_4 vettori non nulli di uno spazio vettoriale V. Supponiamo che v_1, v_2 siano linearmente indipendenti, e che si abbia $v_1 + v_2 - v_3 + 2v_4 = O$. Si ponga $E = L[v_1, v_2], F = L[v_3, v_4]$.

a) Quali valori può assumere $\dim F$?

b) Quali valori può assumere $\dim(E + F)$?

c) Trovare un vettore non nullo appartenente al sottospazio $E \cap F$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & k & 5 \\ -1 & -1 & k \end{pmatrix}$ dipendente dal parametro k.

a) Per quali valori di k la matrice A è invertibile?

b) Per quali valori di k la terza colonna di A è combinazione lineare delle altre?

c) Per quali valori di k la prima colonna di A è combinazione lineare delle altre?

Esercizio 3. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, si consideri l'endomorfismo f di $\mathbf{R}^3$ rappresentato da A rispetto alla base canonica.

a) Calcolare gli autovalori di f e trovare una base di $\mathrm{Ker} f$.

b) Trovare (se esiste) una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di f.

c) Per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ la matrice $A + kI$ è diagonalizzabile?

Esercizio 4. In $\mathbf{R}^4$ sono dati il sottospazio E, generato dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, e il sottospazio F, insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+2w=0 \end{cases}$.

a) Determinare una base e la dimensione di F.

b) Determinare la dimensione del sottospazio $E+F$.

c) Trovare un vettore non nullo di F ortogonale a tutti i vettori di E.

Esercizio 5. a) Determinare l'equazione canonica della conica $\mathcal{C} : -x^2 + 2y^2 + 4xy + 2x - 4y - 1 = 0$ e stabilire di che tipo è.

b) Calcolare le coordinate del centro di simmetria e le equazioni degli assi di $\mathcal{C}$.

Esercizio 6. Dati i punti dello spazio $A = (2, 2, 1), B = (1, 2, 1), C = (1, 0, 1), D = (1, 0, 2)$, sia r la retta per A e B e s la retta per C e D.

a) Scrivere equazioni parametriche di r e s e stabilire se r e s sono complanari o sghembe.

b) Determinare l'equazione cartesiana del piano che contiene r ed è parallelo a s.

c) Enunciare la condizione di parallelismo tra una retta di parametri direttori (l, m, n) e il piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$.