Corso di Geometria, a.a. 2011-2012
Ing. Meccanica A-E, Ing. Ambiente e Territorio
Test 2, soluzioni

Esercizio 1. Siano v_1, v_2, v_3, v_4 vettori non nulli di uno spazio vettoriale V. Supponiamo che v_1, v_2 siano linearmente indipendenti, e che si abbia $v_1 + v_2 - v_3 + 2v_4 = O$. Si ponga $E = L[v_1, v_2], F = L[v_3, v_4]$.

a) Quali valori può assumere $\dim F$?

Soluzione. $\dim F = 1, 2$ *a seconda che* v_3, v_4 *siano LD oppure LI.*

b) Quali valori può assumere $\dim(E + F)$?

Soluzione. $\dim(E + F) = 2, 3$. $E + F$ *è generato* v_1, v_2, v_3, v_4 *e non ha dimensione* 4 *poichè i suoi generatori sono LD per ipotesi. Dunque* $\dim(E + F)$ *vale* 2 *(se* $F \subset E$*) oppure* 3.

c) Trovare un vettore non nullo appartenente al sottospazio $E \cap F$.

Soluzione. Risposta: $v_1 + v_2$. *Il vettore* $v_1 + v_2$ *appartiene a* E *ed è non nullo. Esso appartiene anche a* F *poiché* $v_1 + v_2 = v_3 - 2v_4$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & k & 5 \\ -1 & -1 & k \end{pmatrix}$ dipendente dal parametro k.

a) Per quali valori di k la matrice A è invertibile?

b) Per quali valori di k la terza colonna di A è combinazione lineare delle altre?

c) Per quali valori di k la prima colonna di A è combinazione lineare delle altre?

Soluzione. a) $k \neq 2$ *e* $k \neq -1$. *Infatti,* A *è invertibile se e solo se* $\det A \neq 0$. *Un calcolo mostra che* $\det A = k^2 - k - 2$, *che si annulla per* $k = 2$ *oppure* $k = -1$.

b) *Unico valore:* $k = -1$. *Infatti, se la terza colonna di* A *è combinazione lineare delle altre allora, necessariamente,* $\det A = 0$. *Dunque basta esaminare le due matrici ottenute sostituendo* $k = 2$ *e* $k = -1$. *Se* $k = 2$, *le prime due colonne sono uguali, e si vede subito che la terza colonna non può essere combinazione lineare delle prime due colonne. Se* $k = -1$, *la matrice diventa* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

le prime due colonne sono linearmente indipendenti, e la terza deve risultare combinazione lineare delle prime due poiché $\text{rk}A = 2$.
c) *Due valori:* $k = -1$ *e* $k = 2$. *(Si procede come nel caso b)).* $\square$

Esercizio 3. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, si consideri l'endomorfismo f di $\mathbf{R}^3$ rappresentato da A rispetto alla base canonica.
a) Calcolare gli autovalori di f e trovare una base di $\text{Ker}f$.
b) Trovare (se esiste) una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di f.
c) Per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ la matrice $A + kI$ è diagonalizzabile?

Soluzione. a) *Il polinomio caratteristico di* A *è* $p_A(x) = -x(x-3)^2$, *dunque gli autovalori distinti di* A *sono* $\lambda_1 = 0$ *e* $\lambda_2 = 3$. *L'endomorfismo* f *si scrive, esplicitamente:* $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ -x + 2y + z \\ x + y + 2z \end{pmatrix}$. *Ponendo* $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *e risolvendo il sistema otteniamo la base di* $\text{Ker}f$ *data dal vettore* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
b) *Poiché la matrice* A *è simmetrica,* f *risulta un endomorfismo simmetrico; per il teorema spettrale,* f *è diagonalizzabile ed esiste una base ortonormale di* $\mathbf{R}^3$ *formata da autovettori di* f. *Ora, una base dell'autospazio* $E(3)$ *è data dai vettori* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Con il metodo di Gram-Schmidt otteniamo la base ortonormale di* $E(3)$ *seguente:* $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. *D'altra parte, una base ortonormale di* $E(0)$ *si ottiene semplicemente normalizzando il vettore* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, *ed è dunque* $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. *In conclusione, una base ortonormale di autovettori è data dalla terna*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

c) *La matrice* $A + kI$ *si scrive* $\begin{pmatrix} 2+k & -1 & 1 \\ -1 & 2+k & 1 \\ 1 & 1 & 2+k \end{pmatrix}$ *e risulta simmetrica per tutti i valori di* k. *Per il teorema spettrale,* $A + kI$ *risulta dunque diagonalizzabile per tutti i valori di* k. $\square$

Esercizio 4. In $\mathbf{R}^4$ sono dati il sottospazio E, generato dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, e il sottospazio F, insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+2w=0 \end{cases}$.

a) Determinare una base e la dimensione di F.

b) Determinare la dimensione del sottospazio $E+F$.

c) Trovare un vettore non nullo di F ortogonale a tutti i vettori di E.

Soluzione. a) *Risolvendo il sistema che definisce F, otteniamo ∞^2 soluzioni; una base è formata dai vettori* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, *e* $\dim F = 2$.

b) *La dimensione di $E+F$ uguaglia il rango della matrice ottenuta incolonnando i generatori di E e F, cioè il rango della matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. *Un calcolo mostra che* $\mathrm{rk} A = 2$, *dunque* $\dim(E+F) = 2$. *Si poteva anche osservare che il generatore di E è soluzione del sistema che definisce F, dunque $E \subseteq F$ e* $\dim(E+F) = \dim F = 2$.

c) *Un tale vettore è un multiplo non nullo di* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Infatti, il vettore generico di F si scrive* $\begin{pmatrix} a+2b \\ -a \\ 2b \\ -b \end{pmatrix}$ *con $a, b \in \mathbf{R}$. Imponendo che tale vettore abbia prodotto scalare nullo con il generatore di E, si ottengono ∞^1 soluzioni del tipo $a = t, b = 0$ con $t \in \mathbf{R}$.* $\square$

Esercizio 5. a) Determinare l'equazione canonica della conica $\mathcal{C} : -x^2 + 2y^2 + 4xy + 2x - 4y - 1 = 0$ e stabilire di che tipo è.

b) Calcolare le coordinate del centro di simmetria e le equazioni degli assi di $\mathcal{C}$.

Soluzione. a) La matrice della conica è $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ *con parte principale* $Q = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. *Si ha* $|Q| = -6 < 0$ *e* $|A| = 0$*: dunque la conica è un'iperbole degenere. Gli autovalori di Q sono $\lambda = 3, \mu = -2$ e la forma canonica è:*

$$3X^2 - 2Y^2 = 0.$$

Il grafico della conica è una coppia di rette incidenti.

b) Il centro ha coordinate

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{-6} = 1, \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{-6} = 0,$$

dunque $C = (1, 0)$. Gli assi sono paralleli agli autospazi di Q e passano per il centro. Un calcolo mostra che gli autospazi di Q sono:

$$E(\lambda) = E(3) : 2x - y = 0, \quad E(\mu) = E(-2) : x + 2y = 0.$$

Dunque le equazioni degli assi X e Y nel vecchio riferimento $(O; x, y)$ sono:

$$\text{asse}\, X : 2x - y - 2 = 0, \quad \text{asse}\, Y : x + 2y - 1 = 0.$$

□

Esercizio 6. Dati i punti dello spazio $A = (2, 2, 1), B = (1, 2, 1), C = (1, 0, 1), D = (1, 0, 2)$, sia r la retta per A e B e s la retta per C e D.

a) Scrivere equazioni parametriche di r e s e stabilire se r e s sono complanari o sghembe.

b) Determinare l'equazione cartesiana del piano che contiene r ed è parallelo a s.

c) Enunciare la condizione di parallelismo tra una retta di parametri direttori (l, m, n) e il piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$.

Soluzione. (a) I parametri direttori di r sono proporzionali alla coppia $B - A = (-1, 0, 0)$, dunque $r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$. *Analogamente, i parametri direttori di s sono proporzionali alla coppia $D - C = (0, 0, 1)$, dunque* $s : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}$. *Ora r e s non sono parallele, poiché hanno parametri direttori non proporzionali; d'altra parte r e s non sono incidenti (infatti, i punti di r hanno seconda coordinata $y = 2$, mentre i punti di s hanno seconda coordinata $y = 0$). r e s non sono complanari, e sono dunque sghembe.*

b) *Unico piano: $y - 2 = 0$. Infatti, consideriamo il piano generico, di equazione $\pi : ax + by + cz + d = 0$. Ora π contiene r se e solo se contiene due punti distinti di r, ad esempio A e B. Otteniamo le equazioni*

$$\begin{cases} 2a + 2b + c + d = 0 \\ a + 2b + c + d = 0 \end{cases}.$$

D'altra parte, π è parallelo a s se e solo se è verificata la condizione di parallelismo $al + bm + cn = 0$, dove l, m, n sono i parametri direttori di s. Dunque otteniamo l'equazione $c = 0$. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2a + 2b + c + d = 0 \\ a + 2b + c + d = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

otteniamo le soluzioni $a = 0, b = t, c = 0, d = -2t$ con $t \in \mathbf{R}$, che corrispondono all'unico piano $y - 2 = 0$.

In modo alternativo, potevamo partire dalle equazioni cartesiane della retta r: $\begin{cases} y - 2 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$. *Il fascio (ridotto) di piani di asse r ha equazione $y - 2 + k(z - 1) = 0$ e imponendo il parallelismo con la retta s otteniamo $k = 0$. Dunque il piano cercato è $y - 2 = 0$.*

(c) La condizione è $al + bm + cn = 0$. □