Geometria Differenziale: test (durata: 2 ore)

Esercizio 1. Sia $\alpha : I \to \mathbf{R}^3$ una curva biregolare dello spazio, parametrizzata dall'ascissa curvilinea.

a) Definire curvatura, torsione e riferimento di Frenet di α.

b) Enunciare e dimostrare le formule di Frenet.

c) Dimostrare che α è piana se e solo se la sua torsione si annulla identicamente.

d) Stabilire se la curva

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1+t^2 \\ 1-t^3 \\ -2+t+2t^3 \end{pmatrix}$$

è piana oppure no, ed eventualmente determinare l'equazione cartesiana di un piano che la contiene.

Esercizio 2. Si consideri l'insieme Σ delle soluzioni dell'equazione $x^2+y^2-z=0$.

a) Parametrizzare Σ in modo da ottenere una superficie regolare.

b) Determinare la prima forma fondamentale della parametrizzazione e calcolare l'area della regione $\{(x,y,z) \in \Sigma : x^2+y^2 \leq 1\}$.

c) Determinare seconda forma fondamentale, matrice di Weingarten e curvature principali nel punto $p=(1,0,0)$.

d) Si consideri la sezione piana α ottenuta intersecando Σ con il piano $x-y=0$. Calcolare la curvatura geodetica di α nel suo punto $Q=(0,0,0)$.

Esercizio 3. Si consideri la superficie parametrizzata

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} v\cos u \\ 2-2v \\ 1+2v\sin u \end{pmatrix}, (u,v) \in [0,2\pi] \times \mathbf{R}.$$

a) Determinare la regione Ω in cui f è regolare.

b) Calcolare il versore normale e le curvature principali nei punti dove $u=0$.

c) È vero che Σ è una superficie rigata ? Se è cosi', di che tipo è ?

d) Determinare l'equazione cartesiana di Σ.

e) Dimostrare che la curvatura gaussiana di una *qualunque* superficie rigata non è mai positiva.

Breve formulario.

- Curvatura e torsione della curva $\alpha = \alpha(t)$ con t parametro arbitrario:

$$k(t) = \frac{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}, \quad \tau(t) = -\frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|^2}.$$

- Per una superficie parametrizzata da $f = f(u_1, u_2)$ i coefficienti g_{ij}, l_{ij} della prima e seconda forma fondamentale sono dati, rispettivamente, da:

$$g_{ij} = \langle \frac{\partial f}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j} \rangle, \quad l_{ij} = \langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}, N \rangle,$$

dove N è il versore normale di f in (u, v). La matrice dell'operatore di Weingarten è quindi $w = g^{-1} l$.