Geometria Differenziale: soluzioni test

Esercizio 1. Sia $\alpha : I \to \mathbf{R}^3$ una curva biregolare dello spazio, parametrizzata dall'ascissa curvilinea.
a) Definire curvatura, torsione e riferimento di Frenet di α.
b) Enunciare e dimostrare le formule di Frenet.
c) Dimostrare che α è piana se e solo se la sua torsione si annulla identicamente.
d) Stabilire se la curva

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1+t^2 \\ 1-t^3 \\ -2+t+2t^3 \end{pmatrix}$$

è piana oppure no, ed eventualmente determinare l'equazione cartesiana di un piano che la contiene.

Soluzione. a) Se $T(s) = \alpha'(s)$ allora definiamo *curvatura* di α la funzione $k(s) = |T'(s)| = |\alpha''(s)|$. Definiamo *versore normale* il vettore unitario

$$N(s) = \frac{1}{|\alpha''(s)|}\alpha''(s)$$

che esiste poiche' per ipotesi α è biregolare, dunque $\alpha''(s) \neq 0$. In questo modo si ha per definizione $T'(s) = k(s)N(s)$. Definiamo il *versore binormale* $B(s)$ in questo modo:

$$B(s) = T(s) \wedge N(s).$$

La terna $(T(s), N(s), B(s))$ è ortonormale, e positivamente orientata; essa è detta *riferimento di Frenet* di α. D'ora in poi ometteremo di indicare la dipendenza da s, per brevità.
Derivando rispetto a s l'identità $\langle B, T\rangle = 0$ otteniamo:

$$\langle B', T\rangle + \langle B, T'\rangle = 0$$

Poiche' $\langle B, T'\rangle = k\langle B, N\rangle = 0$ si avra' che B' è ortogonale a T; esso è anche ortogonale a B (poiché ha norma costante) dunque B' è parallelo a N e possiamo scrivere

$$B' = \tau N$$

per una certa funzione $\tau = \tau(s)$ detta *torsione* della curva α.

(b) Abbiamo visto che

$$T' = kN, \quad B' = \tau N,$$

ora calcoliamo N'. Poiche' $B = T \wedge N$ abbiamo anche $N = B \wedge T$ che, derivata, fornisce l'identità:

$$N' = B' \wedge T + B \wedge T' = \tau N \wedge T + kB \wedge N = -kT - \tau B.$$

Dunque abbiamo le *formule di Frenet*:

$$\begin{cases} T' = kN \\ N' = -kT - \tau B \\ B' = \tau N \end{cases}$$

c) Supponiamo, senza ledere la generalità, che $\alpha : [0, l] \to \mathbf{R}^3$. Ricordiamo che il piano osculatore in $\alpha(s)$ è il piano passante per $\alpha(s)$ e ortogonale a $B(s)$. Se α è una curva piana, contenuta nel piano π, allora il piano osculatore di α coincide con π per ogni s; dunque è costante e il suo versore normale $B(s)$ dovra' essere costante. Dunque $B' = 0$ che implica $\tau(s) = 0$ per ogni s.

Viceversa, supponiamo che $\tau(s) = 0$ per ogni s. Dunque $B(s) = B(0) \doteq B$. Vogliamo dimostrare che, per ogni s, $\alpha(s)$ appartiene al piano passante per $\alpha(0)$ ortogonale a B, dunque (poichè tale piano è sempre lo stesso) α è piana. Basta verificare che la funzione

$$\psi(s) \doteq \langle \alpha(s) - \alpha(0), B \rangle$$

è identicamente nulla. Ora $\psi(0) = 0$ e $\psi'(s) = \langle T(s), B(0) \rangle = \langle T(s), B(s) \rangle = 0$ per ogni s, dunque $\psi(s) = \psi(0) = 0$.

c) Risulta:

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ -3t^2 \\ 1 + 6t^2 \end{pmatrix}, \quad \alpha''(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -6t \\ 12t \end{pmatrix}, \quad \alpha'''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

da cui

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ -12t^2 + 2 \\ -6t^2 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha''(t) \rangle = -12$$

e la torsione non è identicamente nulla (in realta' non e' mai nulla). Dunque α è sghemba.

Esercizio 2. Si consideri l'insieme Σ delle soluzioni dell'equazione $x^2 + y^2 - z = 0$.

a) Parametrizzare Σ in modo regolare.

b) Determinare la prima forma fondamentale della parametrizzazione e calcolare l'area della regione $\{(x, y, z) \in \Sigma : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

c) Determinare seconda forma fondamentale, matrice di Weingarten e curvature principali nel punto $p = (1, 0, 1) \in \Sigma$.

d) Si consideri la sezione piana α ottenuta intersecando Σ con il piano $x - y = 0$. Calcolare la curvatura geodetica di α nel suo punto $Q = (0, 0, 0)$.

Soluzione. a) Σ è il grafico della funzione $h(x, y) = x^2 + y^2$ dunque si può sempre parametrizzare in modo regolare. Abbiamo:

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

b) Risulta:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}$$

da cui

$$g = \begin{pmatrix} 1 + 4u^2 & 4uv \\ 4uv & 1 + 4v^2 \end{pmatrix}, \quad \det g = 1 + 4(u^2 + v^2).$$

Se $\Omega = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$ si ha:

$$\text{Area} = \int_\Omega \sqrt{\det g}\, dudv = \int_\Omega \sqrt{1 + 4(u^2 + v^2)}\, dudv.$$

Usiamo coordinate polari

$$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\sin\theta \end{cases}$$

e la ben nota formula:

$$\int_\Omega \phi(u, v)\, dudv = \int_\Omega \phi(r, \theta) r\, drd\theta.$$

In coordinate polari si ha $\Omega = \{(r, \theta) : r \leq 1\}$ e $u^2 + v^2 = r^2$. Dunque:

$$\int_\Omega \sqrt{1 + 4(u^2 + v^2)}\, dudv = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, drd\theta = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr.$$

Poiche'

$$\sqrt{1 + 4r^2}\, r = \frac{d}{dr}\Big(\frac{1}{12}(1 + 4r^2)^{3/2}\Big),$$

si ottiene facilmente

$$\text{Area} = \frac{\pi}{6}\Big(5\sqrt{5} - 1\Big).$$

c) Il versore normale è dato da:

$$N = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \begin{pmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix}$$

e si ha:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e la seconda forma fondamentale è:

$$l = \frac{2}{\sqrt{\det g}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$w = g^{-1} l = \frac{2}{(\det g)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1 + 4v^2 & 4uv \\ 4uv & 1 + 4u^2 \end{pmatrix}.$$

Il punto $p = (1, 0, 1)$ si ottiene per $u = 1, v = 0$. In tale punto

$$w = \frac{2}{5\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

e le curvature principali sono:

$$k_1 = \frac{2}{5\sqrt{5}}, \quad k_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

d) La curvatura geodetica nel punto Q è nulla. In effetti, Σ è una superficie di rotazione, il piano $x = y$ contiene l'asse di rotazione (asse z), dunque la curva α è un meridiano di Σ e, come tale, è una geodetica. In conclusione, la curvatura geodetica di α è nulla in ogni suo punto, e non solo in Q.

Una verifica diretta è possibile, anche se piu' complicata. Parametrizziamo α:

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 2t^2 \end{pmatrix}.$$

Nelle formule, la curva deve essere parametrizzata dall'ascissa curvilinea. Vogliamo ottenere formule della curvatura geodetica e della curvatura normale in una qualunque parametrizzazione. Riparametrizziamo dall'ascissa curvilinea s, ottenendo la curva parametrizzata $\bar{\alpha}(s)$ tale che:

$$\bar{\alpha}(s(t)) = \alpha(t).$$

Detta $v(t) = |\alpha'(t)|$, si ha:

$$\begin{cases} \alpha'(t) = v(t)\bar{\alpha}'(s(t)) \\ \alpha''(t) = \dfrac{dv}{dt}\bar{\alpha}'(s(t)) + v(t)^2\bar{\alpha}''(s(t)) \end{cases}$$

Se $k_g(t)$ indica la curvatura geodetica nel suo punto $\alpha(t) = \bar{\alpha}(s(t))$, si ha (osservando che $\bar{\alpha}'(s)$ è ortogonale a N_Σ):

$$\begin{aligned} k_g(t) &= \det(\bar{\alpha}'(s(t)), \bar{\alpha}'(s(t)), N_\Sigma) \\ &= \frac{1}{v(t)^3} \det(\alpha'(t), \alpha''(t), N_\Sigma) \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} k_n(t) &= \langle \bar{\alpha}''(s(t)), N_\Sigma \rangle \\ &= \frac{1}{v(t)^2} \langle \alpha''(t), N_\Sigma \rangle \end{aligned}$$

Riassumendo, la curvatura geodetica e la curvatura normale di una curva $\alpha(t)$ contenuta nella superficie Σ, non necessariamente parametrizzata dall'ascissa curvilinea, sono date, rispettivamente, da

$$\begin{cases} k_g(t) = \dfrac{1}{v(t)^3} \det(\alpha'(t), \alpha''(t), N_\Sigma) \\ k_n(t) = \dfrac{1}{v(t)^2} \langle \alpha''(t), N_\Sigma \rangle \end{cases}$$

Nel nostro caso:

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 2t^2 \end{pmatrix}, \quad \alpha'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4t \end{pmatrix}, \quad \alpha''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mentre

$$N_\Sigma = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \begin{pmatrix} -2t \\ -2t \\ 1 \end{pmatrix}$$

e si verifica facilmente che

$$\det(\alpha'(t), \alpha''(t), N_\Sigma) = 0$$

È anche facile verificare l'identità $k^2 = k_g^2 + k_n^2$.

Esercizio 3. Si consideri la superficie parametrizzata

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} v\cos u \\ 2 - 2v \\ 1 + 2v\sin u \end{pmatrix}, (u,v) \in [0, 2\pi] \times \mathbf{R}.$$

a) Determinare la regione Ω in cui f è regolare.

b) Calcolare il versore normale e le curvature principali nei punti dove $u = 0$.

c) È vero che Σ è una superficie rigata ? Se è cosi', di che tipo è ?

d) Determinare l'equazione cartesiana di Σ.

e) Dimostrare che la curvatura gaussiana di una *qualunque* superficie rigata non è mai positiva.

Soluzioni. a) Abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} -v \sin u \\ 0 \\ 2v \cos u \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \begin{pmatrix} \cos u \\ -2 \\ 2 \sin u \end{pmatrix},$$

da cui otteniamo:

$$\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} = \begin{pmatrix} 4v \cos u \\ 2v \\ 2v \sin u \end{pmatrix}, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} \right|^2 = 4v^2 (4 \cos^2 u + \sin^2 u + 1)$$

dunque Σ è regolare se e solo se $v \neq 0$, vale a dire

$$\Omega = [0, 2\pi] \times \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

b) Versore normale:

$$N = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \begin{pmatrix} 4v \cos u \\ 2v \\ 2v \sin u \end{pmatrix}, \quad \text{dove} \quad \sqrt{\det g} = 2|v| \sqrt{4 \cos^2 u + \sin^2 u + 1}.$$

Nei punti dove $u = 0$ si ha

$$N = \frac{1}{\sqrt{5}|v|} \begin{pmatrix} 2v \\ v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ora, se $u = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2v \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 4v^2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \frac{1}{20v^2} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4v^2 \end{pmatrix}.$$

D'altra parte si vede che

$$l_{11} = -\frac{2|v|}{\sqrt{5}}, \quad l_{12} = l_{22} = 0,$$

quindi

$$w = g^{-1} l = -\frac{1}{10\sqrt{5}|v|} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{10\sqrt{5}|v|} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi le curvature principali sono

$$k_1 = 0,\ k_2 = -\frac{\sqrt{5}}{10|v|}.$$

c) Possiamo scrivere

$$f(u,v) = \alpha_0 + v\xi(u),$$

dove $\alpha_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\xi(u) = \begin{pmatrix} \cos u \\ -2 \\ 2\sin u \end{pmatrix}$. Dunque la superficie è una rigata, ed è un cono poiche' tutte le generatrici passano per il punto α_0 (vertice).

d) La parametrizzazione è

$$\begin{cases} x = v\cos u \\ y = 2 - 2v \\ z = 1 + 2v\sin u \end{cases}$$

da cui otteniamo

$$x^2 + \Big(\frac{z-1}{2}\Big)^2 = v^2, \quad v = \frac{2-y}{2},$$

dunque

$$x^2 + \Big(\frac{z-1}{2}\Big)^2 = \Big(\frac{2-y}{2}\Big)^2,$$

che semplificata dà

$$4x^2 - y^2 + z^2 + 4y - 2z + 3 = 0.$$

e) Una rigata si parametrizza cosi':

$$f(u,v) = \alpha(u) + v\xi(u),$$

da cui otteniamo immediatamente (nei punti regolari):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0, \quad \text{quindi} \quad l_{22} = 0,$$

poiche' $l_{22} = \langle \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, N\rangle$. Ne segue che $\det l = -l_{12}^2$. Quindi la curvatura gaussiana è data da

$$K = \frac{\det l}{\det g} = -\frac{l_{12}^2}{\det g} \leq 0$$

poiche' $\det g$ è sempre positivo.

Breve formulario.

- Curvatura e torsione della curva $\alpha = \alpha(t)$ con t parametro arbitrario:

$$k(t) = \frac{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}, \quad \tau(t) = -\frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|^2}.$$

- Per una superficie parametrizzata da $f = f(u_1, u_2)$ i coefficienti g_{ij}, l_{ij} della prima e seconda forma fondamentale sono dati, rispettivamente, da:

$$g_{ij} = \langle \frac{\partial f}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j} \rangle, \quad l_{ij} = \langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}, N \rangle,$$

dove N è il versore normale di f in (u, v). La matrice dell'operatore di Weingarten è quindi $w = g^{-1} l$.