Corso di Geometria, a.a. 2012-2013
Ing. Meccanica A-E, Ing. Ambiente e Territorio
Test 1

Il test consiste di sei esercizi, e ha la durata di tre ore. Rispondere negli spazi predisposti, e giustificare le risposte in modo chiaro e conciso (se occorre, usare il retro del fglio). Risposte senza spiegazione non riceveranno credito. Le soluzioni saranno discusse in classe.

Esercizio 1 Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1 \\ k & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -k & 2 \end{pmatrix}$ dipendente dal parametro k, si consideri il sistema lineare omogeneo $AX = 0$, con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$. Determinare i valori di k per i quali il sistema ammette:

a) Solamente la soluzione nulla.

b) ∞^1 soluzioni.

c) ∞^2 soluzioni.

Esercizio 2 Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 e v_1, v_2, v_3 tre vettori linearmente indipendenti di V. Sia E il sottospazio generato da v_1, v_2, v_3.

a) Dimostrare che esiste almeno un vettore $v \notin E$.

b) È vero che, se $v \notin E$, allora v, v_1, v_2, v_3 formano una base di V?

c) Sia F un secondo sottospazio di V, avente anch'esso dimensione 3. Quali valori puo' assumere $\dim(E \cap F)$?

Esercizio 3 In $\mathbf{R}^4$ sono dati i vettori: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2k \\ k \\ -3 \end{pmatrix}$.

a) Determinare, se esiste, un valore di k in modo che i vettori v_1, v_2, v_3 siano linearmente dipendenti.

b) Determinare una base del sottospazio $E = \{v \in \mathbf{R}^4 : \langle v, v_1 \rangle = \langle v, v_2 \rangle = 0\}$.

c) Sia F il sottospazio generato da v_1, v_2, e sia $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. Determinare un vettore non nullo appartenente a F e ortogonale a w.

Esercizio 4 Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcolare gli autovalori di A.

b) Dimostrare che A è diagonalizzabile, e trovare una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.

Esercizio 5 Nel piano sono dati i punti $P_1 = (1,1), P_2 = (2,-1), P_3 = (-2,0)$. Si denoti con r la retta per P_1 e P_2.

a) Trovare il punto P su r tale che il triangolo PP_2P_3 sia rettangolo in P.

b) Determinare l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ di centro P_3 tangente a r.

c) Trovare il punto Q sulla circonferenza $\mathcal{C}$ in modo che il triangolo P_1P_2Q abbia area massima.

Esercizio 6 Nello spazio sono dati il punto $P_0 = (0, 2, -1)$ e la retta $r : \begin{cases} 2x - y + z + 3 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$.

a) Calcolare la distanza di P_0 da r.

b) Calcolare i parametri direttori della retta s, passante per P_0 e perpendicolare ed incidente alla retta r.

c) Determinare le equazioni delle sfere con centro sulla retta r, passanti per P_0 e di raggio $\sqrt{5}$.