Corso di Geometria, a.a. 2012-2013
Ing. Meccanica, Ing. Ambiente e Territorio
Test 1: soluzioni

Esercizio 1 Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1 \\ k & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -k & 2 \end{pmatrix}$ dipendente dal parametro k, si consideri il sistema lineare omogeneo $AX = 0$, con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$. Determinare i valori di k per i quali tale sistema ammette:

a) Solamente la soluzione nulla.
b) ∞^1 soluzioni.
c) ∞^2 soluzioni.

Soluzione. Osserviamo che il minore $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ *ha determinante non nullo, dunque il rango di* A *può valere* 2 *oppure* 3. *Il rango sarà* 2 *se e solo se gli orlati* $\begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & -k & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 3 & 0 \\ 2 & -k & 2 \end{vmatrix}$ *sono entrambi nulli, dunque se e solo se* $k = 0$. *In conclusione:*

$$\mathrm{rk}A = \begin{cases} 2 & se\ k = 0, \\ 3 & se\ k \neq 0. \end{cases}$$

Poichè il sistema lineare omogeneo ammette $\infty^{4-\mathrm{rk}A}$ *soluzioni, le risposte sono:*

a) *Nessun valore di* k.
b) $k \neq 0$.
c) $k = 0$. $\square$

Esercizio 2 Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 e v_1, v_2, v_3 tre vettori linearmente indipendenti di V. Sia E il sottospazio generato da v_1, v_2, v_3.

a) Dimostrare che esiste almeno un vettore $v \notin E$.

b) È vero che, se $v \notin E$, allora v, v_1, v_2, v_3 formano una base di V?

c) Sia F un secondo sottospazio di V avente dimensione 3. Quali valori puo' assumere $\dim(F \cap E)$?

Soluzione. a) *Poiché E è generato da tre vettori linearmente indipendenti, la sua dimensione è uguale a 3, che è minore della dimensione di V, che è 4 per ipotesi. Dunque $E \neq V$ e ci saranno dei vettori di V che non appartengono a E.*

b) *È vero. Basta dimostrare che v, v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti. Supponiamo che:*

$$av + a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0,$$

e verifichiamo che $a = a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Ora a deve essere uguale a zero; infatti, se $a \neq 0$ possiamo dividere per a ambo i membri e v si esprimerebbe come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3: ma questo è impossibile poichè per ipotesi $v \notin E$. Dunque $a = 0$ e la relazione diviene:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0.$$

Poichè v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

c) *I valori possibili di $\dim(E \cap F)$ sono 2 oppure 3. Infatti, il sottospazio $E + F$ ha dimensione minima 3 (poiché contiene E) e dimensione massima 4 (poiché è un sottospazio di V). Applicando la formula di Grassmann:*

$$\dim(E \cap F) = \dim E + \dim F - \dim(E + F),$$

otteniamo la tesi. Osserviamo che la dimensione di $E \cap F$ sè 3 se E è contenuto in F (quindi se $E = F$), ed è 2 negli altri casi. $\square$

Esercizio 3 In $\mathbf{R}^4$ sono dati i vettori:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2k \\ k \\ -3 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare, se esiste, un valore di k in modo che i vettori v_1, v_2, v_3 siano linearmente dipendenti.

b) Determinare una base del sottospazio $E = \{v \in \mathbf{R}^4 : v \times v_1 = v \times v_2 = 0\}$.

c) Sia F il sottospazio generato da v_1, v_2, e sia $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. Determinare un vettore non nullo di F ortogonale a w.

Soluzione. a) $k = 2$. *Infatti, v_1, v_2 sono linearmente indipendenti, e basta imporre che il rango della matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2k \\ 0 & -1 & k \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

sia uguale a 2. *Il minore* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ *ha determinante non nullo; imponiamo che i suoi orlati abbiano determinante nullo:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2k \\ 0 & -1 & k \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2k \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

e troviamo l'unico valore $k = 2$. Osserviamo che, se $k = 2$, si ha effettivamente $v_3 = v_1 - 2v_2$.

b) *Imponiamo al vettore generico ${}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$ l'ortogonalità a entrambi i vettori v_1, v_2. Le equazioni di E sono dunque:*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, otteniamo le soluzioni $\begin{pmatrix} 2t - 5s \\ t - 2s \\ t \\ s \end{pmatrix}$ *con $t, s \in \mathbf{R}$ quindi E ha dimensione* 2 *e una base di E è, ad esempio:*

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \, w_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) *Il vettore generico di F è* $\begin{pmatrix} a \\ -2a + b \\ -b \\ a + 2b \end{pmatrix}$, *con $a, b \in \mathbf{R}$. . Imponiamo l'ortogonalità a w e* *otteniamo $-2a - 6b = 0$; scegliendo $b = 1$ otteniamo $a = -3$ dunque un vettore potrebbe essere* $\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\square$

Esercizio 4 Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcolare gli autovalori di A.

b) Dimostrare che A è diagonalizzabile, e trovare una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.

Soluzione. a) *Il polinomio caratteristico è $p_A(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x = -x(x-2)^2$ e abbiamo due autovalori distinti: $\lambda_1 = 0$ con molteplicità algebrica 1 e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica 2. Si verifica che le molteplicità algebriche e geometriche coincidono per ogni autovalore, quindi A è diagonalizzabile (ovvero, l'endomorfismo f di $\mathbf{R}^3$ rappresentato da A rispetto alla base canonica è diagonalizzabile).*

b) *Cerchiamo una base di ciascun autospazio. Si ha che $E(0)$ ha base $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. L'autospazio $E(2)$ ha equazione $x - 2y + 3z = 0$ e una sua base è $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dunque una base di autovettori è: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, associati rispettivamente a $0, 2, 2$. In conclusione:*

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Esercizio 5 Nel piano sono dati i punti $P_1 = (1,1), P_2 = (2,-1), P_3 = (-2,0)$. Si denoti con r la retta per P_1 e P_2.

a) Trovare il punto P su r tale che il triangolo PP_2P_3 sia rettangolo in P.

b) Determinare l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ di centro P_3 tangente a r.

c) Trovare il punto Q sulla circonferenza $\mathcal{C}$ in modo che il triangolo P_1P_2Q abbia area massima.

Soluzione. a) $P = (\frac{4}{5}, \frac{7}{5})$. *Infatti, la retta r ha equazione cartesiana $2x + y - 3 = 0$; il punto P si ottiene come intersezione di r con la retta s per P_3 perpendicolare a r, che ha equazione $x - 2y + 2 = 0$. Dunque*

$$P : \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases}.$$

b) *Equazione di $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 4x - \frac{29}{5} = 0$. Infatti, la circonferenza cercata ha centro in P_3 e raggio uguale alla distanza di P_3 da r, che vale $\frac{7}{\sqrt{5}}$. Si ottiene:*

$$\mathcal{C} : (x + 2)^2 + y^2 = \frac{49}{5},$$

che dà l'equazione cercata.

c) $Q = (-\frac{24}{5}, -\frac{7}{5})$. *Prendendo P_1P_2 come base del triangolo, si ha che l'altezza è la distanza di Q dalla retta r. Tale distanza è massima quando Q è il punto intersezione della circonferenza con la retta per P_3 (il centro) perpendicolare alla retta r (tangente a $\mathcal{C}$). Tale retta ha equazione $x - 2y + 2 = 0$ e, risolvendo il sistema, otteniamo le coordinate di Q.*

Piú semplicemente potevamo procedere osservando che P_3 è il punto medio del segmento PQ, dove $P = (\frac{4}{5}, \frac{7}{5})$ è il punto di tangenza; dette (x, y) le coordinate di Q, si deve avere:

$$(-2, 0) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5} + x, \frac{7}{5} + y\right),$$

da cui otteniamo $x = -\frac{24}{5}, y = -\frac{7}{5}$. $\square$

Esercizio 6 Nello spazio sono dati il punto $P_0 = (0, 2, -1)$ e la retta $r : \begin{cases} 2x - y + z + 3 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$.

a) Calcolare la distanza di P_0 da r.

b) Calcolare i parametri direttori della retta s, passante per P_0 e perpendicolare ed incidente alla retta r.

c) Determinare le equazioni delle sfere con centro sulla retta r, passanti per P_0 e di raggio $\sqrt{5}$.

Soluzione. a) *La distanza vale $\sqrt{3}$. Tale distanza uguaglia la distanza di P_0 dalla sua proiezione ortogonale sulla retta r, che è il punto H, intersezione di r con il piano π per P_0 perpendicolare a r. Ora , i parametri direttori di r sono $(0, 3, 3)$, proporzionali a $(0, 1, 1)$. Il piano π ha dunque equazione $y + z - 1 = 0$. Intersecando π con r, otteniamo $H = (-1, 1, 0)$. Dunque:*

$$d(P_0, r) = d(P_0, H) = \sqrt{3}.$$

b) *I parametri direttori cercati sono proporzionali a* $(-1,-1,1)$, *che sono le coordinate del vettore* $\overrightarrow{P_0H}$.

c) *Otteniamo due sfere, di equazioni:*

$$\begin{cases} \mathcal{S}_1 : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + 1 = 0 \\ \mathcal{S}_2 : x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

Infatti, i centri delle sfere cercate sono i punti di r *a distanza* $\sqrt{5}$ *da* P_0. *Le equazioni parametriche di* r *sono:*

$$r : \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases},$$

dunque il punto mobile su r *ha coordinate* $C = (-1, 1 + t, t)$. *La distanza di* C *da* P_0 *vale* $\sqrt{2t^2 + 3}$ *e la condizione da imporre è:*

$$2t^2 + 3 = 5.$$

Otteniamo $t = 1, -1$ *da cui i centri* $C_1 = (-1, 2, 1), C_2 = (-1, 0, -1)$. *Le equazioni sono:*

$$\begin{cases} \mathcal{S}_1 : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 5 \\ \mathcal{S}_2 : (x + 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 5 \end{cases}$$