Aspetti quotidiani dell'algebra lineare e della geometria

Andrea Vietri[1]
Sapienza Università di Roma

[1]Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria , via A. Scarpa 16, 00161 Roma. E-mail: andrea.vietri@sbai.uniroma1.it.

CERCASI TASTIERISTA

giovane ma con esperienza, per gruppo rock
telefonare ad Andrea, ...

. . . .

Elementi già presenti: CHITARRA, BATTERIA, BASSO, VOCE.

$\boxed{\textbf{CERCASI TASTIERISTA}}$

giovane ma con esperienza, per gruppo rock

telefonare ad Andrea, ...

. . . .

Elementi già presenti: CHITARRA, BATTERIA, BASSO, VOCE.

Cosa facciamo se si presenta un...

$\boxed{\text{TASTIERISTA che è anche BATTERISTA}}$?

CERCASI TASTIERISTA

giovane ma con esperienza, per gruppo rock
telefonare ad Andrea, ...

. . . .

Elementi già presenti: CHITARRA, BATTERIA, BASSO, VOCE.

Cosa facciamo se si presenta un...

TASTIERISTA che è anche BATTERISTA ?

E se si presenta un bravissimo e simpaticissimo...

BATTERISTA che è anche CANTANTE ?

Definiamo **T**=Tastierista, **C**=Chitarrista, **D**=Batterista (Drums), **B**=Bassista, **V**=Cantante (Voce).

Il primo ragazzo può essere definito come **T+D**, mentre il secondo è **D+V**.

Definiamo **T**=Tastierista, **C**=Chitarrista, **D**=Batterista (Drums), **B**=Bassista, **V**=Cantante (Voce).

Il primo ragazzo può essere definito come **T+D**, mentre il secondo è **D+V**.

Diamo un significato più preciso alla SOMMA algebrica:
A+B vuol dire poter suonare **A** purché qualcun altro suoni **B** o viceversa (si tratta di musicisti che non vogliono mai suonare da soli...).

Definiamo **T**=Tastierista, **C**=Chitarrista, **D**=Batterista (Drums), **B**=Bassista, **V**=Cantante (Voce).

Il primo ragazzo può essere definito come **T+D**, mentre il secondo è **D+V**.

Diamo un significato più preciso alla SOMMA algebrica:
A+B vuol dire poter suonare **A** purché qualcun altro suoni **B** o viceversa (si tratta di musicisti che non vogliono mai suonare da soli...).
A+B+C può suonare **C** purché ci sia un **A+B**, ecc.

L'insieme $\{$**C**,**D**,**B**,**V**,**T+D**$\}$ riesce a **generare** tutti gli elementi $\{$**C**,**D**,**B**,**V**,**T**$\}$. Infatti, oltre ai primi 4 banalmente ottenibili, abbiamo anche

$$\boxed{\mathbf{T}=(\mathbf{T}+\mathbf{D})-\mathbf{D}}$$

(Il nuovo arrivato può svolgere l'attività **T** perché sa che l'altra, **D**, è svolta da un elemento già presente.)

Nel secondo caso, invece, l'aggiunta di **D+V** non consente di ottenere **T**;

in termini algebrici (con somme e/o differenze) diciamo che l'insieme $\{$**C**,**D**,**B**,**V**,**D+V**$\}$ non riesce a **generare** **T**, mentre genera tutti gli altri monomi, banalmente.

Nel secondo caso, invece, l'aggiunta di **D+V** non consente di ottenere **T**;

in termini algebrici (con somme e/o differenze) diciamo che l'insieme {**C**,**D**,**B**,**V**,**D+V**} non riesce a **generare** **T**, mentre genera tutti gli altri monomi, banalmente.

Quanti sono i simboli algebrici **fondamentali** nel secondo insieme? E nel primo?

Nel caso del bravissimo ma **inutile** **D+V**, i simboli fondamentali restano in effetti 4, mentre nel primo caso **salgono** a 5.

Possiamo dire che l'arrivo del primo ragazzo fa salire di 1 la...
dimensione del gruppo rock.

Possiamo dire che l'arrivo del primo ragazzo fa salire di 1 la...
dimensione del gruppo rock.

Supponiamo, ora, che durante le prove del nuovo gruppo (ormai **T+D** è stato assunto!) **D** si assenti per un quarto d'ora.

T+D può sostituirlo (senza suonare più la tastiera)?

Possiamo dire che l'arrivo del primo ragazzo fa salire di 1 la... **dimensione** del gruppo rock.

Supponiamo, ora, che durante le prove del nuovo gruppo (ormai **T+D** è stato assunto!) **D** si assenti per un quarto d'ora.

T+D può sostituirlo (senza suonare più la tastiera)?

Purtroppo **NO**: sappiamo che se **T+D** suona la batteria, egli vuole che **ci sia qualcun altro** che suoni la tastiera.

Definiamo la **dimensione** come il **minimo numero di persone** sufficienti per il funzionamento del gruppo.

Ad esempio, un gruppo formato da

T , **D** , **T+D** , **B+C** , **T+D+B+C**

quale dimensione ha?

Definiamo la **dimensione** come il **minimo numero di persone** sufficienti per il funzionamento del gruppo.

Ad esempio, un gruppo formato da

T , **D** , **T+D** , **B+C** , **T+D+B+C**

quale dimensione ha?

La sua dimensione non scende, se escludiamo **T+D** e **T+D+B+C**.
Infatti **T+D=(T)+(D)** e **T+D+B+C=(T)+(D)+(B+C)**.

La dimensione vale 3 .

Definiamo la **dimensione** come il **minimo numero di persone** sufficienti per il funzionamento del gruppo.

Ad esempio, un gruppo formato da

T , **D** , **T+D** , **B+C** , **T+D+B+C**

quale dimensione ha?

La sua dimensione non scende, se escludiamo **T+D** e **T+D+B+C**.
Infatti **T+D=(T)+(D)** e **T+D+B+C=(T)+(D)+(B+C)**.

La dimensione vale 3 .

Una base (insieme minimale di generatori) è costituita da

T , **D** , **B+C** .

Notiamo che avremmo potuto escludere ad es. **T** e **B+C**. Infatti: **T=(T+D)–(D)** e **B+C=(T+D+B+C)–(T+D)**.

In questo caso, una base sarebbe stata

D , **T+D** , **T+D+B+C** .

Notiamo che avremmo potuto escludere ad es. **T** e **B+C**. Infatti: **T=(T+D)–(D)** e **B+C=(T+D+B+C)–(T+D)**.

In questo caso, una base sarebbe stata

$$\mathbf{D}\ ,\ \mathbf{T+D}\ ,\ \mathbf{T+D+B+C}\ .$$

Attenzione, però: che senso ha la presenza di **B+C** nel gruppo che comprende anche **T** e **D**?

Notiamo che avremmo potuto escludere ad es. **T** e **B+C**. Infatti: **T=(T+D)–(D)** e **B+C=(T+D+B+C)–(T+D)**.

In questo caso, una base sarebbe stata

D , **T+D** , **T+D+B+C** .

Attenzione, però: che senso ha la presenza di **B+C** nel gruppo che comprende anche **T** e **D**?

Curiosamente, **B+C** non può suonare! La dimensione vale 3, il pubblico vede 3 musicisti, ma uno non fa niente.

Il modello algebrico spesso **è più generale, racchiude il modello reale** e crea oggetti ultra-reali. Tale modello, però, consente spesso di comprendere meglio il modello reale soggiacente.

In una squadra di calcio, la dimensione della rosa dei calciatori **deve essere uguale a 11**.

In una squadra di calcio, la dimensione della rosa dei calciatori **deve essere uguale a 11**.

Se nella rosa ci sono due portieri, uno resta in panchina (è **generato** dall'altro portiere).

In una squadra di calcio, la dimensione della rosa dei calciatori **deve essere uguale a 11**.

Se nella rosa ci sono due portieri, uno resta in panchina (è **generato** dall'altro portiere).

Se il gruppo contiene un portiere che è anche centravanti, **deve necessariamente** contenere un altro giocatore che sia portiere o centravanti.

In una squadra di calcio, la dimensione della rosa dei calciatori **deve essere uguale a 11**.

Se nella rosa ci sono due portieri, uno resta in panchina (è **generato** dall'altro portiere).

Se il gruppo contiene un portiere che è anche centravanti, **deve necessariamente** contenere un altro giocatore che sia portiere o centravanti.

Se il gruppo contiene 25 giocatori ma nessun portiere, la sua dimensione scende a 10 o a meno.

Un esempio più... appetibile:

Siano **a** un bicchierino di latte e **b** un bicchierino di caffè.

Cosa rappresenta a+b ? E invece 2a+b?

Un esempio più... appetibile:

Siano **a** un bicchierino di latte e **b** un bicchierino di caffè.

Cosa rappresenta a+b ? E invece 2a+b?

Decidiamo che il primo rappresenta un **cappuccino**, mentre il secondo è un **latte macchiato**.

Più sinteticamente, scriviamo il primo come **(1,1)** (**una** quantità di **a** più **una** di **b**), il secondo come **(2,1)**.

Un esempio più... appetibile:

Siano **a** un bicchierino di latte e **b** un bicchierino di caffè.

Cosa rappresenta a+b ? E invece 2a+b?

Decidiamo che il primo rappresenta un **cappuccino**, mentre il secondo è un **latte macchiato**.

Più sinteticamente, scriviamo il primo come **(1,1)** (**una** quantità di **a** più **una** di **b**), il secondo come **(2,1)**.

Quale coppia di numeri denoterà il **caffè macchiato**? E la semplice **tazzina di caffè**?

Nel primo caso potremmo scrivere $\mathbf{(1/3\,,1)}$ (**un terzo** di bicchierino di latte, più **un** caffè); nel secondo caso, $\mathbf{(0\ ,\ 1)}$ (**niente** latte, e precisamente **un** bicchierino di caffè).

Nel primo caso potremmo scrivere $\mathbf{(1/3\,,1)}$ (**un terzo** di bicchierino di latte, più **un** caffè); nel secondo caso, $\mathbf{(0\ \,,\ 1)}$ (**niente** latte, e precisamente **un** bicchierino di caffè).

Come possiamo **generare** un caffè, partendo da un cappuccino e da un latte macchiato?

$$(0,1)=x(1,1)+y(2,1)\ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y=0\\ x+y=1\end{array}\right.\ \Rightarrow (\ldots)$$

$$\Rightarrow x=2\,,\ y=-1\,.$$

Nel primo caso potremmo scrivere $\mathbf{(1/3\,,1)}$ (**un terzo** di bicchierino di latte, più **un** caffè); nel secondo caso, $\mathbf{(0\ ,\ 1)}$ (**niente** latte, e precisamente **un** bicchierino di caffè).

Come possiamo **generare** un caffè, partendo da un cappuccino e da un latte macchiato?

$$(0,1) = x(1,1) + y(2,1) \;\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ x + y = 1 \end{array} \right. \;\Rightarrow (\dots)$$

$$\Rightarrow x = 2\,,\; y = -1\,.$$

Secondo il nostro modello, dobbiamo mescolare due cappuccini ed eliminare (**?**) un latte macchiato dal composto ottenuto.

Il modello prevede i **numeri negativi**, che non hanno un riscontro reale... o quasi (dovremmo far **evaporare** un latte macchiato, e come?). Ma quello che possiamo fare è **leggere in un altro modo la relazione algebrica** trovata:

Il modello prevede i **numeri negativi**, che non hanno un riscontro reale... o quasi (dovremmo far **evaporare** un latte macchiato, e come?). Ma quello che possiamo fare è **leggere in un altro modo la relazione algebrica** trovata:

$$1 \cdot (2, 1) + 1 \cdot (0, 1) = 2 \cdot (1, 1) \ ,$$

cioè possiamo mescolare un latte macchiato e un caffè, ottenendo **due cappuccini** (che possiamo poi separare benissimo).

Il modello prevede i **numeri negativi**, che non hanno un riscontro reale... o quasi (dovremmo far **evaporare** un latte macchiato, e come?). Ma quello che possiamo fare è **leggere in un altro modo la relazione algebrica** trovata:

$$1 \cdot (2, 1) + 1 \cdot (0, 1) = 2 \cdot (1, 1) \ ,$$

cioè possiamo mescolare un latte macchiato e un caffè, ottenendo **due cappuccini** (che possiamo poi separare benissimo).

Ora complichiamo il modello: aggiungiamo una terza componente per indicare il **numero di cucchiaini di zucchero**:

Ad es. $(2, 1, \mathbf{3})$ rappresenta un latte macchiato con 3 cucchiaini di zucchero (!).

Poco fa avevamo dimostrato il
Teorema: Un cappuccino è la metà di un latte macchiato e un caffè mescolati.

Poco fa avevamo dimostrato il
Teorema: Un cappuccino è la metà di un latte macchiato e un caffè mescolati.

Vediamo, ora, se vale il
Teorema: Un cappuccino **con 2 cucch. di zucchero** è la metà di: un latte macchiato **con 3 cucch.** e un caffè **con 1 cucch.** , mescolati.

Poco fa avevamo dimostrato il
Teorema: Un cappuccino è la metà di un latte macchiato e un caffè mescolati.

Vediamo, ora, se vale il
Teorema: Un cappuccino **con 2 cucch. di zucchero** è la metà di: un latte macchiato **con 3 cucch.** e un caffè **con 1 cucch.** , mescolati.

Verifica:

$$1 \cdot (2, 1, 3) + 1 \cdot (0, 1, 1) = (2, 2, 4) = 2 \cdot (1, 1, 2) \;\Rightarrow\; \textbf{VERO}$$

$$\text{Scriviamo, equivalentemente : } (1, 1, 2) = \frac{1}{2}((2, 1, 3) + (0, 1, 1))$$

Abbiamo appena visto alcune operazioni con i **vettori numerici**.
Cosa rappresenta, ora, l'equazione seguente?

$$x(2,1,3)+y(0,1,1)=(1,1,1)$$

Abbiamo appena visto alcune operazioni con i **vettori numerici**. Cosa rappresenta, ora, l'equazione seguente?

$$x(2,1,3) + y(0,1,1) = (1,1,1)$$

Ci stiamo chiedendo se è possibile **generare** un cappuccino che contenga un cucchiaino di zucchero, disponendo di un latte macchiato con 3 cucch. e di un caffè con 1 cucch.

$$\begin{cases} 2x + 0y = 1 \\ x + y = 1 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow (\ldots)$$

Abbiamo appena visto alcune operazioni con i **vettori numerici**. Cosa rappresenta, ora, l'equazione seguente?

$$x(2,1,3) + y(0,1,1) = (1,1,1)$$

Ci stiamo chiedendo se è possibile **generare** un cappuccino che contenga un cucchiaino di zucchero, disponendo di un latte macchiato con 3 cucch. e di un caffè con 1 cucch.

$$\begin{cases} 2x + 0y = 1 \\ x + y = 1 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow (...)$$

$\Rightarrow$ **IMPOSSIBILE**. Il terzo vettore non è...

... "combinazione lineare" dei primi due.

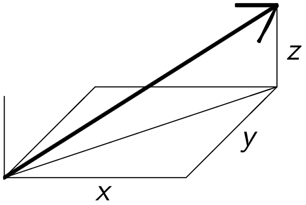
Il nuovo parametro (lo zucchero) ha fatto salire a 3 la dimensione dello **spazio delle bevande**.

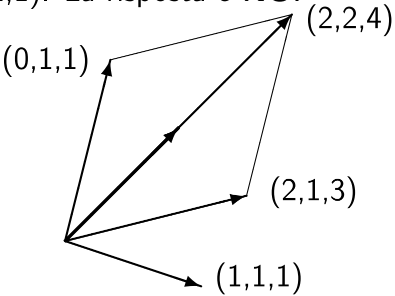
In tale spazio ci sono **3 coordinate** relative a **3 generatori (base)**: una per il latte, una per il caffè, una per lo zucchero.

Il nuovo parametro (lo zucchero) ha fatto salire a 3 la dimensione dello **spazio delle bevande**.

In tale spazio ci sono **3 coordinate** relative a **3 generatori (base)**: una per il latte, una per il caffè, una per lo zucchero.

Geometricamente, ci stiamo chiedendo se il vettore $(1,1,1)$ giace nello stesso piano di (2,1,3) e (0,1,1). La risposta è **NO**.





In questi casi, uno strumento superiore per capire se un vettore è generato da altri due vettori dati, è il **determinante**.

In questi casi, uno strumento superiore per capire se un vettore è generato da altri due vettori dati, è il **determinante**.

Prima di tutto, costruiamo un'opportuna **matrice**:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

In questi casi, uno strumento superiore per capire se un vettore è generato da altri due vettori dati, è il **determinante**.

Prima di tutto, costruiamo un'opportuna **matrice**:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ora effettuiamo un classico calcolo (...) utilizzando i numeri della matrice.

Se otteniamo **ZERO** (e solo in quel caso) la risposta è affermativa.

Il calcolo del determinante, opportunamente potenziato, permette anche di capire se **un sistema ammette soluzioni o no**:

$$\begin{cases} 2x + 0y = 1 \\ x + y = 1 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} (...)$$

Il calcolo del determinante, opportunamente potenziato, permette anche di capire se **un sistema ammette soluzioni o no**:

$$\begin{cases} 2x + 0y = 1 \\ x + y = 1 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ (\ldots)$$

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + 4z = 7 \\ 5x - y - 6z = 0 \\ 4x - 2y - 9z = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 7 \\ 5 & -1 & -6 & 0 \\ 4 & -2 & -9 & 3 \end{pmatrix} \ (\ldots)$$

Il calcolo del determinante, opportunamente potenziato, permette anche di capire se **un sistema ammette soluzioni o no**:

$$\begin{cases} 2x + 0y = 1 \\ x + y = 1 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ (\ldots)$$

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + 4z = 7 \\ 5x - y - 6z = 0 \\ 4x - 2y - 9z = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 7 \\ 5 & -1 & -6 & 0 \\ 4 & -2 & -9 & 3 \end{pmatrix} \ (\ldots)$$

Dal punto di vista **geometrico**, il primo sistema rappresenta un'**intersezione di 3 rette**.
E il secondo sistema, cosa rappresenta? Un'**intersezione di...**

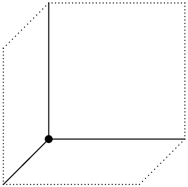
Il calcolo del determinante, opportunamente potenziato, permette anche di capire se **un sistema ammette soluzioni o no**:

$$\begin{cases} 2x + 0y = 1 \\ x + y = 1 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} (\ldots)$$

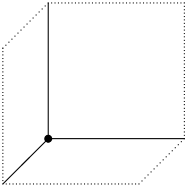
$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + 4z = 7 \\ 5x - y - 6z = 0 \\ 4x - 2y - 9z = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 7 \\ 5 & -1 & -6 & 0 \\ 4 & -2 & -9 & 3 \end{pmatrix} (\ldots)$$

Dal punto di vista **geometrico**, il primo sistema rappresenta un'**intersezione di 3 rette**.
E il secondo sistema, cosa rappresenta? Un'**intersezione di... PIANI**

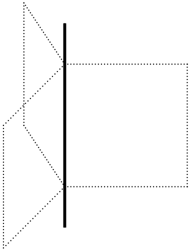
Tre piani possono avere **ad es. un unico punto** come intersezione:



Tre piani possono avere **ad es. un unico punto** come intersezione:



Ma tre piani possono anche avere **una retta intera** in comune:



In questo caso, l'equazione di un piano è **generata** dalle altre due (è una "combinazione lineare") proprio come abbiamo visto prima per il latte macchiato, ecc.

Con gli strumenti acquisiti durante il corso di geometria sarà possibile, ad esempio, riconoscere **equazioni inutili (generate da altre equazioni)**, riconoscere **vettori generati da altri vettori**, ridurre **all'essenziale** i sistemi lineari, interpretare **geometricamente** tali sistemi, trovare soluzioni **parametriche** complete, cambiare **coordinate** per visualizzare meglio un'ellisse, ecc.

Con gli strumenti acquisiti durante il corso di geometria sarà possibile, ad esempio, riconoscere **equazioni inutili (generate da altre equazioni)**, riconoscere **vettori generati da altri vettori**, ridurre **all'essenziale** i sistemi lineari, interpretare **geometricamente** tali sistemi, trovare soluzioni **parametriche** complete, cambiare **coordinate** per visualizzare meglio un'ellisse, ecc.

Matrici e vettori avranno un ruolo fondamentale...