**Diario delle lezioni (a.a. 2018 - 2019)**

**Mar. 25-09-2018 :** Presentazione del corso e delle modalità d’esame. La geometria che studieremo è in molti casi uno studio “al microscopio” di entità geometriche complesse (ad es. traiettorie curvilinee). La perpendicolarità è legata all’angolo tra due segmenti di retta (nonostante la traiettoria sia curva). Geometria del piano, vettori geometrici, vettori numerici che rappresentano vettori geometrici. Rappresentazione di equazioni “lineari” mediante i vettori numerici. Componenti di un vettore numerico. Operazioni con vettori numerici. Costruzione dell’equazione cartesiana di una retta, dati due punti di passaggio, alla luce delle definizioni sui vettori geometrici. “Determinante” come metodo più robusto per esprimere la proporzionalità di due vettori numerici con due componenti.

**Mer. 26-09 :** I vettori geometrici sono “liberi” (non hanno a priori un punto di applicazione). Somma di vettori geometrici e corrispondente somma dei vettori numerici. Moltiplicazione per uno scalare. Equazioni parametriche di una retta, in forma vettoriale e in forma estesa. Passaggio alla forma cartesiana (assorbimento del parametro) e viceversa. Vettore direttore di una retta, coseni direttori. Utilizzo del determinante per trovare equazioni cartesiane di rette. Giacitura (retta parallela alla retta data e passante per l’origine). I vettori direttori soddisfano l’equazione della giacitura (sono assimilati a punti della nuova retta passante per O).

**Gio. 27-09 :** Approfondimenti di geometria nel piano O*xy*. Vettori numerici e spazi R*n* (prodotto cartesiano). Vettori geometrici **i** e **j**. Associatività e commutatività della somma di vettori geometrici. La sottrazione (nell’insieme dei numeri reali) non è invece associativa. Combinazione lineare di alcuni vettori dati, geometrici e poi numerici. Costruzione di vettori a partire da alcuni vettori dati, con opportune combinazioni lineari. Tre vettori sono sufficienti ma ne bastano in effetti 2. Uno solo invece non basta. Normalizzazione di un vettore per ottenere il relativo versore. Vettore perpendicolare a una retta. Proiezione ortogonale di un vettore su una retta (esercizio che utilizza la definizione di vettore perpendicolare). La difficoltà nel trovare il relativo coseno verrà superata agevolmente nelle prossime settimane, con la definizione del cosiddetto *prodotto scalare*. Sistemi di equazioni lineari in due incognite, caso delle rette coincidenti (la soluzione è proprio una forma parametrica della retta).

**Ven. 28-09 :** Sistemi lineari di rette, dunque sistemi in due incognite. Rappresentazione geometrica di un sistema di diverse rette nel piano O*xy*. Combinazione lineare di due equazioni lineari. Eliminazione di equazioni che risultano essere combinazioni lineari di altre equazioni del sistema (esse vengono soddisfatte dalla soluzione comune alle altre equazioni). Sistemi impossibili e configurazione di tre rette “a triangolo”. Matrici, definite come righe formate da vettori di un fissato spazio R*n*. Matrice incompleta e matrice completa di un sistema lineare. Risoluzione di un sistema lineare in due incognite, generico: comparsa dei determinanti nelle soluzioni (regola di Cramer).

**Mar. 02-10 :** Definizione generale di sistema lineare e di matrice. Notazione a doppio indice (riga, colonna). Prodotto di matrici. Tale prodotto non è in generale commutativo. Scrittura di un sistema come prodotto della matrice incompleta per il vettore delle incognite in verticale (vettore “trasposto”, da definire) posto uguale al vettore dei termini noti. Esempi di prodotti di matrici. Matrice identità I*n*. Matrice inversa (cenno) e suo utilizzo nella risoluzione di un sistema in due incognite (nota: si tratta di una nuova versione della regola di Cramer, da rivedere nelle prossime lezioni in una forma generale).

**Mer. 03-10 :** Approfondimenti sulle matrici. Matrici simmetriche, triangolari, diagonali e loro relazioni con i sistemi lineari che esse possono descrivere. Trasposta di una matrice. Vettore trasposto. Il prodotto di matrici è stato progettato in modo da garantire l’associatività: A(Bxt)=(AB)xt . Il prodotto di due matrici può dare una matrice con tutti zeri. Approfondimenti sui vettori geometrici. Differenza di vettori. Punto medio.

**Gio. 04-10 :** La comparsa di identità come 4=4 durante la risoluzione di un sistema mediante la sostituzione è il segnale di qualche interazione tra le equazioni; una o più equazioni risultano eliminabili. Metodo di Gauss (riduzione a gradini) per la risoluzione di un sistema lineare. Eliminazione di equazioni corrispondenti alle righe nulle. Pivot e parametri. Sistemi impossibili (pivot nella colonna dei termini noti). Operazione elementare gene­rale. Simbolo ∞k (soluzione con *k* parametri). Interpretazione geometrica di un sistema in tre incognite con un parametro nella soluzione (traiettoria nello spazio, in effetti una retta), cenno. Deve essere ancora dimostrata la validità del metodo di Gauss.

**Ven. 05-10 :** Le righe della matrice completa associata a un sistema possono essere interpretate come vettori di un opportuno spazio Rn . La ricerca di combinazioni lineari di righe conduce al concetto generale di vettori *linearmente indipendenti*. Spazi vettoriali. Vettori linearmente dipendenti ed esplicitazione di un vettore come combinazione lineare degli altri. Esempi geometrici e algebrici di insiemi che sono spazi vettoriali; controesempi – insiemi che non sono spazi vettoriali. Spazio vettoriale generato dalle righe di una matrice. Teorema (da dimostrare): la riduzione a gradini conduce a un insieme finale di righe che generano lo stesso spazio vettoriale delle righe iniziali (dunque le equazioni finali sono equivalenti a quelle iniziali: la riduzione a gradini è un metodo coerente). Le righe non nulle di una matrice ridotta a gradini sono linearmente indipendenti. *Sottospazi* (spazi vettoriali contenuti in altri spazi vettoriali), da definire nella prossima lezione. La condizione di chiusura rispetto alla somma e al prodotto con scalari assicura che il sottoinsieme è uno spazio vettoriale (un *sottospazio*), senza la necessità di verificare gli 8 assiomi.

**Mar. 09-10 :** Reversibilità delle operazioni elementari durante il processo di riduzione a gradini. Sottospazio generato dalle righe della matrice completa associata a un sistema lineare. Grazie alla reversibilità, il sottospazio generato dalle righe finali coincide con quello generato dalle righe iniziali (dunque il metodo trasforma correttamente un sistema in un altro equivalente). Oltretutto il numero massimo di righe linearmente indipendenti non cambia (questo seguirà dal teorema, da dimostrare, sulla *dimensione*). Basi. Definizioni equivalenti di base. Esempi di basi formate da vettori geometrici nel piano e nello spazio. Esempi di insiemi di generatori, in spazi R*n* , che sono linearmente dipendenti e dunque non costituiscono una base.

**Mer. 10-10 :** Esercizi su argomenti recenti (in attesa dell’assegnazione del tutor). Studio di insiemi di generatori all’interno di spazi R*n* . Utilizzo del teorema sulla dimensione (da dimostrare) per individuare basi di spazi R*n* e di sottospazi. Utilizzo della riduzione a gradini per gestire sistemi parametrici (dunque nelle operazioni elementari possono essere presenti parametri).

**Gio. 11-10 :** Dimostrazione del teorema della dimensione: le basi di un dato spazio vettoriale hanno tutte lo stesso numero di elementi (nota: se il numero è finito), la cosiddetta *dimensione* dello spazio. Il sottospazio generato dalle righe di una matrice (o in generale da alcuni vettori di un dato spazio vettoriale) è in effetti un sottospazio (è chiuso rispetto alle due operazioni): dimostrazione. Dal teorema della dimensione segue che il numero di pivot in una qualunque riduzione a gradini (fissata una matrice iniziale) non varia al variare della sequenza di operazioni elementari effettuate e che tale numero è anche il numero massimo di righe linearmente indipendenti nella matrice iniziale. Questo numero è il cosiddetto *rango* di una matrice (rango *per pivot*). È chiaro, ora, che un sistema è risolubile se e solo se il rango della matrice incompleta è uguale a quello della completa e che nel caso della risolubilità il numero di parametri è uguale al numero di incognite meno il rango. Approfondimenti sui sottospazi. Esempi e controesempi di sottospazi. Le soluzioni di un sistema lineare omogeneo costituiscono un sottospazio di R*n* , dove *n* è il numero di incognite (dimostrazione mediante il prodotto di matrici).

**Ven. 12-10 :** Ultimi approfondimenti prima dell’introduzione del concetto di *determinante* – nella prossima settimana. Base canonica di R*n* , già utilizzata in varie occasioni. Analisi delle implicazioni logiche tra le tre definizioni equivalenti di base (dimostrazione “circolare”). Matrici sostitutive delle operazioni elementari (esempio nel caso dello scambio di righe che è anch’esso un’operazione elementare), cenno. Teorema di *Rouché-Capelli* – già studiato utilizzando il rango per pivot. Discussione di un sistema lineare mediante la riduzione a scala (al variare del parametro del sistema il rango varia in funzione dei pivot e dalla loro posizione). Coordinate di un vettore rispetto a una data base. Unicità delle coordinate (da dimostrare). Esempi di coordinate: spazi vettoriali di polinomi di grado limitato. Cenno all’isomorfismo di spazi vettoriali mediante l’utilizzo delle coordinate.

**Mar. 16-10 :** Introduzione al determinante e brevi cenni storici sull’evoluzione di questo concetto. Definizione (originale) di determinante mediante le permutazioni, per matrici quadrate di ordine 3 e con cenno al caso generale. Teorema di Laplace e nuova definizione di determinante. Formula per il calcolo di un determinante nel caso generale (lungo una riga, ma vale anche per una fissata colon­na). Secondo teorema di Laplace: lo scambio di righe (o di colonne) provoca il cambiamento di segno del determinante (idea della dimostrazione: caso delle righe adiacenti e poi per due righe non adiacenti).

**Mer. 17-10 :** Approfondimenti su argomenti vari. Regola di Sarrus. Matrici con determinante nullo (teorema della dipendenza lineare, da dimostrare). Applicazioni del metodo di Laplace. Risoluzione di un sistema omogeneo in 4 incognite e calcolo di una base del relativo sottospazio. Aggiunta dei termini noti e corrispondente modifica delle soluzioni (“traslazione” di un ente “geometrico” in uno spazio 4-dimensionale). Studio della dipendenza lineare di vettori di uno spazio vettoriale generico.

**Gio. 18-10 :** Varie proprietà del determinante. Determinante della trasposta (dimostrazione per induzione sull’ordine della matrice, cenno). Determinante di matrici triangolari (dimostrazione mediante le permutazioni). Linearità. Conseguenza (in realtà è una formulazione equivalente) del secondo teorema di Laplace: una matrice quadrata con due righe uguali ha determinante nullo. Teorema, più generale: una matrice con righe o colonne linearmente dipendenti ha determinante nullo. Modifica del determinante a seguito di una riduzione a scala. Il determinante nullo resta nullo anche alla fine, mentre se non è nullo resta non nullo. Teorema inverso: una matrice con righe o colonne linearmente indipendenti ha determinante diverso da zero (dimostrazione mediante la riduzione a scala). Calcolo del determinante mediante la riduzione a scala.

*Nota*: è stato inserito un esercizio supplementare (sui sottospazi) nella pagina del corso, dopo gli esercizi di Vietri.

**Ven. 19-10 :** Sottomatrici e minori. Il rango può essere calcolato anche cercando il massimo ordine di un minore non nullo (idea della dimostrazione: a seguito di una riduzione a scala i determinanti interni a una matrice vengono semplicemente moltiplicati per numeri non nulli). Rango per colonne, equivalente alle altre tre definizioni di rango (per righe, per pivot, per minori). Rango per minori e teorema degli orlati. Problema inverso: trovare opportuni valori di un parametro in modo da rendere linearmente dipendenti le righe di una matrice – utilizzo del rango per minori e comodità del teorema degli orlati. Nuovo argomento: formula di Cramer per sistemi lineari con lo stesso numero di equazioni e di incognite (da dimostrare).

**Mar. 23-10 :** Matrice inversa. Costruzione generale e dimostrazione della proprietà che caratterizza l’inversa: il prodotto con la matrice originale deve dare la matrice identità. Utilizzo della matrice inversa per la risoluzione di sistemi con matrice incompleta quadrata di rango massimo (formula di Cramer). Introduzione al metodo di Cramer per matrici di forma generale (da completare nella prossima lezione). Teorema di Binet (senza dimostrazione). Utilizzo del teorema di Binet per dimostrare che una matrice con determinante nullo non può avere un’inversa.

**Nota**: è stato inserito un secondo esercizio supplementare (bozza) nella pagina del corso, dopo gli esercizi di Vietri. Si tratta di un approfondimento abbastanza mirato.

**Mer. 24-10 :** Esercizi vari su argomenti recenti. Formula di Cramer generale, applicabile dopo l’eliminazione di alcune righe e la scelta di parametri (grazie al rango per minori). Calcolo del rango di una matrice di ordine 4 mediante il teorema degli orlati. Discussione di un sistema mediante il rango per minori.

**Gio. 25-10 :** Geometria dello spazio *Oxyz*. Punti e vettori nello spazio in tre dimensioni. Lunghezza di un vettore e definizione del vettore che ha due punti come estremi orientati. Studio di equazioni lineari in tre incognite. Analogie con lo studio di rette in un riferimento O*xy*. Una equazione di tale forma rappresenta un piano. Sottospazio associato al piano (giacitura: il termine noto diviene nullo). Equazioni parametriche di un piano. La dimensione di un piano vale 2. Piani particolari. Vettore parallelo a un dato piano (interpretato come punto, esso soddisfa l’equazione della giacitura). Allineamento di tre punti nello spazio e corrispondente parallelismo di due vettori definiti dai tre punti.

**Ven. 26-10 :** Ultimi approfondimenti sull’inversa e il determinante. Calcolo dell’inversa mediante la doppia riduzione a scala (metodo di Gauss-Jordan). La velocità di questo metodo è sempre più alta rispetto al metodo dei complementi algebrici, al crescere dell’ordine della matrice (cenno). Studio di sistemi lineari generici mediante il rango per minori. Intersezione di due o tre piani. Retta nello spazio (primi cenni).

*Nota*: per venerdì 2 novembre è prevista un’ora di esercitazione e ricevimento in aula 4, a partire dalle 9.00. L’orario, solo per il 2 novembre, è quindi 9.00 - 10.00 anziché 8.00 - 10.00. Gli studenti interessati potranno chiarire eventuali dubbi sugli argomenti recenti o più vecchi del corso.

**Mar. 30-10 :** *Sospensione delle lezioni a causa del maltempo.*

**Mer. 31-10 :** Piano passante per tre punti, tre metodi per ottenere un’equazione cartesiana: da equazioni parametriche ad equazione cartesiana (assorbimento dei due parametri); modellazione della generica equazione *ax*+*by*+*cz*+*d*=0 con i vincoli dei tre punti (sistema con un parametro “illusorio”); annullamento di un certo determinante (dipendenza lineare di due vettori fissi e di uno variabile con un estremo uguale al punto variabile sul piano).

**Ven. 02-11 :** Esercizi vari, sulla base delle domande poste dagli studenti.

**Mar. 06-11 :** Rette nello spazio *Oxyz* . Rette particolari. Giacitura di una retta. Scelta di un punto su una retta mediante l’intersezione (se esiste) con un piano speciale; ciò equivale a porre un’incognita uguale a un dato numero, ad es. *x*=1. Punto generico sulla retta (soluzione parametrica del sistema). I vettori direttori di una retta data in forma cartesiana sono le soluzioni del relativo sistema omogeneo. Metodo dei tre determinanti per calcolare un vettore direttore (vettore (*l*,*m*,*n*) ). Equazioni parametriche e passaggio ad equazioni cartesiane (assorbimento del parametro). Costruzione delle equazioni cartesiane di una retta (conoscendo due punti di passaggio) mediante la proporzionalità di opportuni vettori.

**Mer. 07-11 :** Scrittura delle equazioni cartesiane di una retta (dati due punti di passaggio) mediante il metodo degli orlati. Significato geometrico dell’equazione superflua (la terza): si tratta di un piano che contiene la retta già definita dall’intersezione degli altri due piani, quindi il terzo piano è superfluo. Fascio proprio di piani: ogni equazione è una combinazione lineare delle due equazioni che definiscono la retta, asse del fascio. Esercizi risolubili con l’ausilio del fascio di piani. Parallelismo retta-piano (il rango dell’in­com­pleta vale 2, quello della completa vale 3).

*Nota*: per il 14 novembre, mercoledì, è prevista un’esercitazione (simulazione di una parte di prova scritta d’esame).

**Gio. 08-11 :** Esercizi vari su rette e piani. Posizioni reciproche di due rette. I 4 casi. Rette parallele e rette sghembe.

**Ven. 09-11 :** Strumenti alternativi per affrontare esercizi di geometria dello spazio: fasci di piani oppure punti parametrici su rette. Approfondimenti sulle rette sghembe. Nuovo argomento: perpendicolarità, angoli, coseni, prodotto scalare. Definizione elementare dell’operazione di prodotto scalare per vettori geometrici di dimensione 2 e 3. Formula del coseno (da dimostrare). Significato del coseno negativo. Il prodotto scalare nullo equivale alla perpendicolarità.

**Mar. 13-11 :** Dimostrazione della formula del coseno mediante il calcolo della proiezione orto­gonale di un vettore rispetto a un altro, in dimensione 2 (approfondimento: il caso della dimensione 3 può essere trattato con lo stesso ragionamento, utilizzando piani anziché rette per effettuare le proiezioni). Vettore (*a*,*b*,*c*) perpendicolare a un piano e suo utilizzo per calcolare il coseno dell’angolo tra due piani. Angolo tra un piano e un vettore (in questo caso viene calcolato il seno anziché il coseno!).

**Mer. 14-11 :** Esercitazione con simulazione di alcune parti di una prova scritta (argomenti della prima metà del corso).

**Gio. 15-11 :** Distanza tra un punto e un piano nello spazio (formula, da dimostrare). Fasci impropri di piani. Distanza tra un punto e una retta (costruzione del piano perpendicolare alla retta e passante per il punto). Approfondimenti su fasci di piani e angoli.

**Ven. 16-11 :** Approfondimenti sulle distanze tra vari enti geometrici dello spazio *Oxyz.* Calcolo di equazioni cartesiane di piani e rette con specifiche condizioni di parallelismo o perpendicolarità. Prodotto scalare e nozione di modulo (lunghezza) in R*n* .

**Mar. 20-11 :** Dimostrazione della formula per la distanza punto-piano. Proiezione ortogonale vettoriale. Coefficiente di Fourier. Decomposizione di un vettore in coordinate rispetto a una base “ortogonale” composta da versori (base “ortonormale”, da definire) mediante i coefficienti di Fourier. Proiezione ortogonale astratta, in spazi R*n* generali, mediante la definizione di prodotto scalare generale. Decomposizione di un vettore in proiezione e componente ortogonale. Proiezione di un vettore su un piano, grazie al vettore normale (*a*,*b*,*c*) su cui proiettare per ottenere la componente ortogonale da sottrarre.

**Mer. 21-11 :** Basi ortogonali. Proiezione ortogonale di un vettore su un piano (somma di due proiezioni ortogonali rispetto a una data base ortogonale. Generalizzazione a spazi R*n* . I vettori ortogonali a un sottospazio definito da un sistema omogeneo sono combinazioni lineari delle righe della matrice incompleta.

**Gio. 22-11 :** Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Approccio geometrico e successiva dimostra­zione algebrica dell’ortogonalità del secondo vettore rispetto al primo (e del terzo rispetto ai primi due già ortogonalizzati). In generale, ortogonalità dell’*i*-esimo vettore rispetto a tutti i precedenti *i*-1 vettori già ortogonalizzati - approfondimento. Equazioni cartesiane di sottospazi di R*n* (generaliz­zazione, in qualunque dimensione, delle formule per i piani e le rette passanti per l’origine, mediante il rango di un’opportuna matrice).

**Ven. 23-11 :** Estensione di una base ad una base nello spazio ambiente. Sottospazio ortogonale a un dato sottospazio di R*n* ; caso particolare della formula di Grassmann (la somma delle dimensioni dei due sottospazi è uguale alla dimensione dello spazio ambiente). Equazioni di un sottospazio ortogonale e calcolo di una sua base. (1: estensione di una base del sottospazio iniziale e successiva ortogonalizzazione dei nuovi elementi; 2: calcolo delle equazioni e successivo calcolo della base; 3: direttamente dai coefficienti delle equazioni del sottospazio iniziale). Prodotto vettoriale, definizione geometrica e formula (da dimostrare). Calcolo di aree di triangoli mediante il prodotto vettoriale.

**Mar. 27-11 :** Approfondimenti sul prodotto vettoriale e sul calcolo di aree. Cenno al calcolo del volume di un parallelepipedo. Dimostrazione della formula del prodotto vettoriale (la distributività è lasciata come approfondimento). Ultimo argomento sui sottospazi: la formula di Grassmann. Intersezione di sottospazi: calcolo di una base dell’intersezione (esempio di due piani in R3) mediante un sistema di equazioni cartesiane o mediante le equazioni parametriche.

**Mer. 28-11 :** Somma di sottospazi (l’*unione* di due sottospazi non è un sottospazio ed è in generale contenuta strettamente nella somma). Somma diretta. Formula di Grassmann nel caso generale. Sfera nello spazio *Oxyz* e analogia con la circonferenza nel piano *Oxy*. *Questionario OPIS* (opinioni studenti).

**Gio. 29-11 :** Dimostrazione della formula di Grassmann (sintesi, utilizzando il completamento delle basi). Cenno alla dimostrazione alternativa mediante il rango, in spazi R*n*. Prodotto misto. Nuovo argomento: applicazioni lineari e autovettori. Autovettori e autovalori relativi a una matrice (calcolo formale, per ora indipendente dal significato di autovettore in un dato contesto come ad es. un’applicazione lineare). Metodo per il calcolo degli autovettori e sua dimostrazione. Panoramica sull’importanza del concetto di autovettore in questioni applicative e nella matematica pura. Significato non banale dell’autovalore nullo (invece il vettore nullo non è mai un autovettore, per definizione!).

**Ven. 30-11 :** Le due molteplicità associate a un autovalore (da dimostrare: la geometrica non supera mai l’algebrica). Argomento fondamentale correlato: le applicazioni (o funzioni) lineari. Relazione tra equazioni e funzioni anche non lineari, nel caso di una sola variabile. Caso particolare delle funzioni lineari (definite mediante le due classiche proprietà) ed estensione ai sistemi lineari in più incognite: applicazioni lineari tra spazi R*n*  con *n* > 1 . Dominio, codominio, immagine. Iniettività e suriet­tività. Relazione tra il rango e la suriettività (da approfondire).

**Mar. 04-12 :** Esempi di applicazioni lineari tra spazi R*n* anche con dimensione diversa. Nel caso più semplice le colonne della matrice sono le immagini della base canonica. Iniettività e suriettività in relazione al rango. Matrice inversa per l’applicazione lineare inversa (se esiste). Nucleo. Rappresentazione geometrica di un’applicazione lineare con particolare attenzione al ruolo del rango e del nucleo.

**Mer. 05-12 :** Approfondimenti vari sulle applicazioni lineari tra spazi R*n* . Immagine “isomorfa” al dominio nel caso dell’iniettività (esempio di un piano immerso nello spazio). Proiezioni (esempio della proiezione sul piano *Oxy*). Rappre­sen­tazione geometrica di autovettori per spazi R2 . Relazione tra il nucleo e l’autovettore nullo. *Questionario OPIS* .

**Gio. 06-12 :** Definizione generale di applicazione lineare e di matrice di un’applicazione lineare rispetto a due basi fissate, nel dominio e nel codominio. Metodo del doppio conteggio per le sommatorie doppie. Ruolo fondamentale delle coordinate nella scrittura della relativa matrice. Le coordi­nate non hanno senso se non si precisa la base. Esempio dei polinomi di grado limitato con l’applicazione “deri­vata”. Uno dei punti di forza degli autovettori è che la matrice rispetto a una base di autovettori, nel dominio e nel codominio, è diagonale (da approfondire).

**Ven. 07-12 :** Approfondimenti sulle applicazioni lineari: iniettività e nucleo. Il nucleo e l’immagine sono sottospazi. Argomento notevole: diagonalizzazione. Chiusura di una matrice a destra e a sinistra mediante la matrice degli autovettori e la sua inversa (se esiste una base di autovettori come colonne della matrice). Significato di questa operazione nel contesto delle applicazioni lineari: matrici del cambiamento di coordinate. Diagonalizzazione di un’applicazione lineare mediante il cambiamento di coordinate, dalla base iniziale alla base di autovettori.

**Mar. 11-12 :** Composizione di applicazioni e relativo prodotto di matrici. Rappresentazione geome­trica degli autovettori e delle loro immagini per un’applica­zione lineare nel piano cartesiano. L’applicazione lineare è di facile lettura se utilizziamo la base di autovettori (la matrice diventa infatti diagonale). Cambiamento di coordinate: la relativa matrice può essere interpretata come la matrice dell’applicazione “identità” rispetto alla base iniziale nel dominio e alla base finale nel codominio. Matrici simmetriche e teorema spettrale. Basi ortonormali.

**Mer. 12-12 :** Ulteriori approfondimenti sugli autovettori e sul cambiamento di coordinate. Composizione di opportune matrici al fine di ottenere la matrice di un’applicazione lineare rispetto a basi diverse da quelle iniziali. Autospazi e decomposizione del dominio in somma diretta di autospazi, nel caso della diagonalizzazione. Approfondimenti su concetti generali inerenti al corso ma indipendenti dagli ultimi argomenti. Relazioni e grafi. Simmetria, transitività. Cenno all’insieme quoziente nel caso dei vettori (relazione di sovrapponibilità). Matrice simmetrica di 0 e 1 associata a un grafo. I concetti di determinante, rango, prodotto di matrici, autovalori, ecc. si trasportano in contesti diversi come in quello dei grafi e delle relazioni (cenno).

**Gio. 13-12 :** Definizione di una conica mediante il cono a due falde. Definizione mediante i fuochi (ellisse e iperbole). Definizione mediante il fuoco e la direttrice. Cenno alle coniche degeneri. Cenno alla geometria proiettiva (i tre tipi di conica diventano un unico tipo). Eccentricità. Rappresentazione cartesiana di una conica. Equazioni canoniche di coniche (prerequisito). Coniche ruotate. Studio di un equazione di grado 2 in 2 incognite. Matrice di ordine 2 associata alla parte di grado 2 dell’equazione. Diagonalizzazione mediante una base ortogonale di autovettori (la matrice è infatti simmetrica), primi cenni.

**Ven. 14-12 :** Rotazione del riferimento per ottenere una forma canonica di una data conica (esem­pio dell’ellisse). Cambiamento di coordinate mediante una base ortonormale di autovettori. Passag­gio dal nuovo riferimento a quello iniziale: trasforma­zione dei fuochi e dell’equazione della diret­trice (nel caso delle equazioni occorre il cambiamento di coordinate inverso!). Matrici ortogonali. Matrice dei termini di secondo grado: significato del segno del determinante. Nel caso della parabola un autovalore è uguale a zero. La diagonalizzazione non è sufficiente se si tratta di una parabola (primi cenni).

**Mar. 18-12 :** Rotazione di una parabola. Matrice di ordine 3 relativa a una conica. Rotazioni e riflessioni. Scambio degli autovettori o cambio di verso di un solo autovettore. Coniche degeneri. Metodo del determinante invariante. Traslazioni (cenno). Calcolo del centro di una conica (ellisse o iperbole).

**Mer. 19-12 :** Esercitazione sulle applicazioni lineari, i sottospazi, l’ortogonalità (argomenti inclusi nella seconda parte del corso).

**Gio. 20-12 :** Quadriche (cenni). Sezioni di una quadrica mediante piani opportuni. Diagonaliz­zazione della relativa matrice di ordine 3. I 5 tipi di quadrica non degenere. Punti ellittici e punti iperbolici (cenni). Curve nello spazio e vettori tangenti (cenni). Conclusione del corso. Esercizi vari di riepilogo.

**………………………………………………………………………………..**

Esercizi assegnati e argomenti del testo consigliato:

(Le parti in grassetto sono le più recenti. *In genere le assegnazioni si spingono fino a tre o quattro lezioni successive*.)

*• Esercizi del dott. Vietri:*

20-26. 3 (solo l’ultima domanda, sui prodotti). 13-15, 17-19. 61-65 (non l’interpretazione geometrica nello spazio), 69, 71, 72. 3 (rango), 6 (vecchio esercizio); 8-12 e 67, 68, 70 non col determinante e gli “orli” ma invece con la riduzione a scala e – nel caso dei sistemi – eventualmente col metodo di sostituzione in alternativa o in aggiunta al metodo di Gauss della riduzione a scala. 4, 5 (moltiplicare le matrici e poi calcolare il determinante; successivamente, invece, con “Binet”). 8-12 e 67, 68 70 ora col determinante e il teorema degli orlati. Nei vecchi sistemi, utilizzare il metodo di Cramer parametrico (generale) e calcolare il rango mediante i minori. 1-3. Interpretare geometricamente i vecchi sistemi lineari in tre incognite (piani e loro intersezioni). 7 (vecchio), 28-30, [64, 65, 69] completi, 66. Successivamente: 31-41, [43, 48, 55] (parte I). 27, 49, 52, 55 (parte II), 60. 42-48, 50, 51, 53, 54, 56-59. (Nota: sono stati aggiornati gli esercizi Vietri 27, 43, 47 nella pagina web del corso.) 89-109 (nuovo argomento da approfondire entro la fine di novembre). 73, 74, 77 (fino alla controimmagine di (5,10) ), 78-81, [82 e 83: autovettori], 85-88. 75-77, 82-84. 16. 110-122.

*• Esercizi del prof. Del Fra:*

24 (b,e,h), 25, 37, 38, 40, 42-50, 53-57. 14 (non il “rango”), 15, 24 (completo). 16-22. 11 (solo il rango; non il determinante), 12, 14 (rango), 26 (provare con la riduzione a gradini), 28 (vecchio esercizio). 11, 24 (a,l) con “Cramer”, 27. 13. Interpretare geometricamente i vecchi sistemi lineari in tre incognite (piani e loro intersezioni). 61, 84, 25 (completo). Successivamente: 62-64, 72-83. 39, 41, 51, 52, 86, [87 e 105, meno recenti]. 36, 65-71, 85, 88-100 (85 e 95: provare senza l’ausilio del “prodotto vettoriale”, ancora da definire). 101-103 (prodotto vettoriale, non “scalare”, da definire entro la fine di novembre), 104 (meno recente). 85 e 95 col “prodotto vettoriale”. 29-33, 34 (solo gli autovettori), 35. 1-10 (approfondimento sulle relazioni).

*• Esercizi della prof.ssa Carrara, sulle coniche:*

È ora possibile leggere questi esercizi sulle coniche (14 dicembre 2018).

*• Libro di testo (compresi gli esercizi nei relativi paragrafi):*

Cap.1. 2.1, 2.2. 2.3, 2.10 e poi completare il Cap. 2. Ancora il Cap. 2 e poi 3.1, 3.2. 3.3 – 3.10. Completare il Cap. 3. 4.1 – 4.3 e successivamente 4.4 – 4.9. 4.10 e successivamente completare il Cap. 4. Cap. 5. 6.1 – 6.10, 6.16 e successivamente 6.11 – 6.15, 6.17. Cap. 7. Cap. 8 (argomenti generali).