Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... Firma: ....

1. Determinare i valori di k che rendono linearmente dipendenti i vettori $(1,1,1,2,k)$, $(k,1,3,3,-2)$, $(7,7,k,7,8)$.

Sol. Consideriamo la matrice

$$M(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & k \\ k & 1 & 3 & 3 & -2 \\ 7 & 3 & k & 7 & 8 \end{pmatrix} .$$

Utilizzando il teorema degli orlati potremmo fissare ad es. la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ – essa ha il determinante diverso da zero – per poi imporre che i tre determinanti relativi alle colonne $(1,2,3)$, $(2,3,4)$, $(2,3,5)$ siano nulli. Percorriamo invece un'altra strada, riducendo M a gradini e imponendo che i pivot siano meno di tre. Ciò sarà realizzabile soltanto se esisteranno pivot dipendenti da k; al contrario, se troveremo tre pivot costanti il rango di M sarà 3 a prescindere da k. Procediamo dunque con una riduzione a scala. Con $\underline{r}_2 \to \underline{r}_2 - k\underline{r}_1$ e $\underline{r}_3 \to \underline{r}_3 - 7\underline{r}_1$ otteniamo

$$M_1(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & k \\ 0 & 1-k & 3-k & 3-2k & -2-k^2 \\ 0 & -4 & k-7 & -7 & 8-7k \end{pmatrix} .$$

Ora eseguiamo l'operazione $\underline{r}_3 \to (1-k)\underline{r}_3 + 4\underline{r}_2$, purché k sia diverso da 1. Otteniamo

$$M_2(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & k \\ 0 & 1-k & 3-k & 3-2k & -2-k^2 \\ 0 & 0 & -k^2+4k+5 & -k+5 & 3k^2-15k \end{pmatrix} .$$

Affinché il rango di M sia 2 deve esistere un valore di k che faccia scomparire il terzo pivot rendendo nullo il termine $-k^2+4k+5$, ma non solo: deve annullarsi l'intera terza riga. Effettivamente una delle due radici di $-k^2+4k+5$ ($k=5$) annulla anche gli altri due polinomi. Per $k=5$ siamo quindi certi che le tre righe sono linearmente dipendenti. In realtà sarebbe stato sufficiente analizzare il posto $(3,4)$ trovando così un solo valore, appunto $k=5$, che risultava poi essere anche una radice degli altri due polinomi.

Resta infine da vedere cosa accade se $k=1$; tornando a M_1 notiamo che $M_1(1)$ ha le prime tre colonne linearmente indipendenti (il relativo determinante non è nullo), quindi il suo rango vale 3. L'unico valore trovato resta perciò $k=5$.

2. Determinare i valori di k che rendono privo di soluzioni il sistema

$$\begin{cases} x+y+z=k \\ kx+y+3z=-2 \\ 7x+3y+kz=8 \end{cases} .$$

Sol. Possiamo utilizzare la stessa riduzione a gradini del precedente esercizio, escludendo la quarta colonna (ciò non comporta alcun cambiamento nelle operazioni elementari). Nel caso presente, tuttavia, dobbiamo imporre che il terzo pivot esista e oltretutto occupi la colonna dei termini noti. Come sappiamo, per $k=1$ il rango della matrice incompleta non scende, dunque il terzo pivot non soddisfa la nostra richiesta. Escluso il caso $k=1$, passiamo ora all'analisi della terza riga nella matrice M_2 privata della quarta colonna. Delle due radici di $-k^2+4k+5$ soltanto $k=-1$ è idonea. Questo è pertanto l'unico valore che rende il sistema impossibile da risolvere.

3. Determinare e in modo che il punto $A=(1,2,e)$ giaccia nel piano contenente l'origine e i punti $B=(1,1,1)$, $C=(3,2,1)$. Successivamente scrivere un'equazione cartesiana del piano parallelo all'asse y e contenente i punti B, C.

Sol. È sufficiente imporre che sia nullo il determinante

$$\begin{vmatrix} 1-0 & 2-0 & e-0 \\ 1-0 & 1-0 & 1-0 \\ 3-0 & 2-0 & 1-0 \end{vmatrix} .$$

Il valore ottenuto, $e=3$, è in effetti tale che $(1,2,e)$ sia una combinazione lineare di $(1,1,1)$ e $(3,2,1)$, in dettaglio $4(1,1,1)-(3,2,1)$. Notiamo che la presenza dell'origine consente di leggere questo problema nel linguaggio algebrico dei sottospazi (dobbiamo fare in modo che il vettore parametrico appartenga al sottospazio generato dai due vettori costanti).

Rispondiamo alla seconda domanda. Possiamo partire dall'equazione generale di un piano, $ax+by+cz+d=0$, per poi imporre il passaggio per i due punti e il parallelismo con l'asse y. Otteniamo:

$$\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ 3a+2b+c+d=0 \\ b=0 \end{cases} .$$

Notiamo che la terza equazione esprime l'annullamento di $ax+by+cz$ – attenzione, senza la d – mediante il vettore direttore $(0,1,0)$ relativo all'asse y. Se per errore manteniamo la d, stiamo imponendo il *passaggio per il punto* $(0,1,0)$, dunque una condizione molto diversa e non richiesta: $b+d=0$. Tornando al sistema, otteniamo la soluzione $(a,b,c,d)=(0,0,t,-t)$ e ponendo ad es. $t=1$ arriviamo al piano di equazione $z-1=0$.

4. Dimostrare che l'insieme $\mathcal{S}=\{(a+b+c+d,a,a,b-d) : a,b,c,d\in\mathbf{R}\}$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ e determinarne una base.

Sol. Mediante il metodo "$1-0$" otteniamo i vettori $(1,1,1,0)$, $(1,0,0,1)$, $(1,0,0,0)$, $(1,0,0,-1)$ che risultano essere generatori di $\mathcal{S}$. Infatti

$$a(1,1,1,0)+b(1,0,0,1)+c(1,0,0,0)+d(1,0,0,-1)=(a+b+c+d,a,a,b-d) .$$

Dunque l'insieme $\mathcal{S}$ è in realtà un sottospazio, dato che è definibile mediante le combinazioni lineari di alcuni vettori (noto teorema...). Notiamo che questo ragionamento non è più valido se ad esempio consideriamo la forma parametrica $(a^2+b+c+d,a,a,b-d)$ oppure $(a+b+c+d,a,a,b+\sin(\frac{3\pi}{2}d))$, perché pur ottenendo gli stessi vettori di prima, non possiamo più risalire alla forma parametrica, mediante semplici combinazioni lineari. I simboli algebrici introdotti sono troppo complessi, incomprensibili, con gli strumenti *lineari* che possediamo!

Per trovare un insieme minimale di generatori di $\mathcal{S}$ calcoliamo intanto il determinante della matrice che li contiene come righe, ottenendo zero. Ora notiamo (ad es. con l'ausilio del teorema degli orlati e scegliendo la sottomatrice di ordine 2 in alto a sinistra) che le prime tre righe e le colonne 1, 2, 4 individuano un minore non nullo, quindi come elementi della base possiamo scegliere i primi tre vettori. Più elementarmente, potevamo notare che la seconda colonna della matrice è uguale alla terza; eliminando una delle due colonne otteniamo una matrice che – si vede – ha almeno un minore di ordine 3 non nullo, ecc.

5. Scrivere equazioni cartesiane della retta passante per $(8,2,3)$ e parallela al vettore $(0,3,1)$.

Sol. Imponiamo che la matrice

$$\begin{pmatrix} x-8 & y-2 & z-3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

abbia rango 1. Attenzione: non possiamo orlare il posto $(2,1)$, perché contiene lo zero (otterremmo infatti due equazioni equivalenti, cioè due piani uguali che non identificano quindi una retta). Restano necessariamente i due altri minori di ordine 2, orlando ad es. il posto $(2,2)$, con le relative equazioni $\cancel{3}(x-8)=0$ e $y-3z+7=0$.

6. Descrivere con un'unica equazione cartesiana (dipendente da parametri) la totalità dei piani passanti per il punto $P=(9,8,7)$.

Sol. L'oggetto in esame è la cosiddetta *stella di piani* contenente il punto dato. Imponendo che l'equazione generica $ax+by+cz+d=0$ venga soddisfatta da P otteniamo $d=-9a-8b-7c$; non dobbiamo introdurre ulteriori condizioni. Riorganizzando l'equazione otteniamo $a(x-9)+b(y-8)+c(z-7)=0$ e questa è in effetti una via più diretta per ottenere la risposta.