Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... Firma: ....

1. Calcolare una base di autovettori (soltanto due) dell'applicazione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f(1,0,0) = (3,0,0)$, $f(0,1,0) = (4,1,-2)$, $f(0,0,1) = (-4,2,5)$. Introdurre poi un vettore perpendicolare alla base trovata e scrivere la matrice di f rispetto alla base estesa (sia nel dominio che nel codominio).

Sol. Determiniamo intanto gli autovalori:

$$-\begin{vmatrix} 3-s & 4 & -4 \\ 0 & 1-s & 2 \\ 0 & -2 & 5-s \end{vmatrix} = s^3 - 9s^2 + 27s - 27 = 0 \ .$$

Potremmo utilizzare il metodo di Ruffini, ma notiamo che il polinomio è uguale al cubo di $(s-3)$. Esiste quindi un solo autovalore, $s = 3$, con molteplicità algebrica 3 (il grado del polinomio). Esso ha una "grossa responsabilità" perché spetta soltanto a lui la creazione di autovettori...

Sostituendo $s = 3$ nella matrice e risolvendo il relativo sistema, otteniamo 2 parametri (il rango scende a 1; non possiamo chiedergli di scendere addirittura a zero!): l'autospazio è un piano definito dall'equazione $y - z = 0$. Gli autovettori sono dunque tutti e soli i vettori della forma (α, β, β). Scegliamo $\{(1,0,0), (0,1,1)\}$ come base di autovettori ed estendiamola a una base di $\mathbf{R}^3$ mediante il vettore normale $(0,1,-1)$. Abbiamo infine:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \ .$$

Notiamo che il blocco di ordine 2 in alto a sinistra è una matrice diagonale – è il massimo che si possa chiedere, non potendo diagonalizzare l'intera matrice!

2. In un riferimento $Oxyz$ è data la retta $r : x - y + 2 = 2x + y + z - 4 = 0$. Descrivere mediante un sistema di equazioni cartesiane la totalità delle rette perpendicolari a r e passanti per $P = (1,3,-1)$. Successivamente risolvere lo stesso problema con la condizione che le rette formino un angolo di $60°$ con r.

Sol. Le rette in questione costituiscono un fascio proprio all'interno del piano π perpendicolare a r e passante per P (notiamo che $P \in r$). È sufficiente dunque intersecare π col piano generico contenente r. Un modo per ottenere π è il seguente:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Stiamo infatti imponendo – oltre al passaggio per P – che due vettori perpendicolari a r siano paralleli al piano cercato. Possiamo anche rileggere questo determinante come $\ell(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)$, dove (ℓ, m, n) è un vettore direttore di r. Comunque, otteniamo l'equazione $x + y - 3z - 7 = 0$. Un sistema idoneo è quindi

$$\begin{cases} x + y - 3z - 7 = 0 \\ \lambda(x - y + 2) + \mu(2x + y + z - 4) = 0 \end{cases} .$$

Come soluzione alternativa possiamo considerare le combinazioni lineari $\alpha(1,-1,0) + \beta(2,1,1)$; esse esprimono tutti i vettori perpendicolari a r. Ora scriviamo le equazioni parametriche del fascio come $(x,y,z) = (1,3,-1) + t(\alpha(1,-1,0) + \beta(2,1,1)\,)$; ogni retta del fascio corrisponde a una coppia (α, β) a meno di un fattore di proporzionalità. Infine passiamo alle equazioni cartesiane assorbendo la t: poiché $t = (z+1)/\beta$ (se $\beta \neq 0$) abbiamo:

$$\begin{cases} x = 1 + (z+1)\frac{\alpha}{\beta} + 2z + 2 \\ y = 3 - (z+1)\frac{\alpha}{\beta} + z + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z(\gamma + 2) - 3 = 0 \\ y + z(\gamma - 1) - 4 = 0 \end{cases} .$$

Dobbiamo includere anche la retta di equazioni $x + y - 4 = z + 1 = 0$ (caso $\beta = 0$).

Il caso dell'angolo di $60°$ è ben diverso: se utilizziamo il primo metodo, anziché il piano perpendicolare dovremmo considerare un idoneo *cono a due falde*. Esaminiamo il metodo alternativo. I vettori direttori (p, q, r) delle rette in questione sono esattamente quelli che soddisfano la condizione

$$\frac{|(p,q,r) \times (1,1,-3)|}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}\sqrt{11}} = \frac{1}{2} \ ,$$

dove $(1, 1, -3)$ è un vettore direttore di r. Se $p \neq 0$ possiamo dividere per p ottenendo (da un'equazione di secondo grado) $r = r(q)$ e in conclusione la famiglia infinita di vettori direttori $(1, q, r(q))$. Ora procediamo come sopra, scrivendo $(x, y, z) = (1, 3, -1) + t(1, q, r(q))$. Se $p = 0$ otteniamo nuovamente $r = r(q)$ ma si tratta di infiniti vettori multipli di due soli vettori. Infatti stiamo analizzando un caso particolare rispetto agli infiniti casi ammissibili; per chiare questioni geometriche dobbiamo aspettarci due soluzioni (nota: se invece supponiamo che $r = 0$ non troviamo soluzioni perché il cono a due falde interseca solo nel vertice il piano di equazione $z = 0$).

3. Dimostrare che un sistema lineare ammette soluzione se e solo se il rango per colonne della matrice incompleta coincide col rango per colonne della completa.

<u>Sol</u>. Si tratta della parte esistenziale del noto teorema di Rouché-Capelli (l'altra parte riguarda invece il numero dei parametri). Se $\underline{v}_1,...,\underline{v}_n$ sono i vettori corrispondenti alle colonne dell'incompleta, una soluzione del sistema è precisamente una combinazione lineare $x_1\underline{v}_1 + ... + x_n\underline{v}_n = \underline{b}$, dove $\underline{b}$ è il vettore dei termini noti (tralasciamo i simboli di trasposizione). Dunque il massimo numero di colonne linearmente indipendenti resta invariato passando da incompleta a completa. Il viceversa può essere dimostrato con lo stesso approccio.

4. Calcolare la proiezione ortogonale di $(1, 0, 0, 0)$ rispetto al sottospazio $S : 2x-y+2w-z = x-z = 0$. Stabilire se la somma di S col sottospazio $T = \langle(1, 3, 1, 2), (0, 0, 0, 1)\rangle$ è una somma diretta.

<u>Sol</u>. Calcoliamo una base di S per poi ortogonalizzarla – difficilmente troveremo subito una base ortogonale! Abbiamo: $x = z$, $y = 2x + 2w - z = 2w + z$ (infatti ci aspettavamo $4 - 2$ parametri). Dalla forma parametrica di S, $(z, 2w + z, w, z)$, otteniamo la base $\{(0, 2, 1, 0), (1, 1, 0, 1)\}$. Ora ortogonalizziamo ad es. il primo vettore rispetto al secondo, ottenendo $(0, 2, 1, 0) - \frac{2}{3}(1, 1, 0, 1)$ o meglio un suo multiplo, $(2, -4, -3, 2)$. Infine calcoliamo la proiezione ortogonale:

$$\underline{p} = \frac{(1,0,0,0)\times(1,1,0,1)}{(1,1,0,1)\times(1,1,0,1)}(1,1,0,1) + \frac{(1,0,0,0)\times(2,-4,-3,2)}{(2,-4,-3,2)\times(2,-4,-3,2)}(2,-4,-3,2) = \left(\frac{5}{11}, \frac{1}{11}, -\frac{2}{11}, \frac{5}{11}\right) .$$

Per conferma, notiamo che $\underline{p} - (1, 0, 0, 0)$ è ortogonale ai due vettori della base di S, dunque (esercizio) è ortogonale a tutto il sottospazio S.

Poniamo in riga i 4 vettori delle basi di S e di T (non occorre utilizzare la base ortogonalizzata poco fa, complicheremmo soltanto i calcoli). Il rango della matrice ottenuta vale 3, quindi $S \cap T$ ha dimensione $2 + 2 - 3 = 1$ e la somma non è diretta (era sufficiente fermarsi al rango uguale a 3). Una strategia diversa è quella di risolvere il sistema

$$a(0, 2, 1, 0) + b(1, 1, 0, 1) = c(1, 3, 1, 2) + d(0, 0, 0, 1) \ .$$

Oltre alla soluzione nulla emerge tutta una soluzione parametrica $(a, a, a, -a)$ che conduce all'intersezione $\{(a, 3a, a, a) : a \in \mathbf{R}\}$. Abbiamo così identificato esplicitamente un vettore che genera il sottospazio $S \cap T = \langle(1, 3, 1, 1)\rangle$. Ricordiamo che nel caso di una somma diretta l'intersezione consiste del solo zero.

5. Siano U e V due spazi vettoriali le cui basi sono state scelte come $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ e $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$. Sia data l'applicazione lineare $f : U \to V$ tale che $f(\underline{u}_1) = \underline{v}_2 - 4\underline{v}_3$ e $f(\underline{u}_2) = \underline{v}_1 + 5\underline{v}_2$. Determinare un vettore di V che non abbia controimmagine secondo f.

<u>Sol</u>. Costruiamo la matrice di f rispetto alle basi date, ponendo in colonna le coordinate delle immagini della base di U scritte rispetto alla base di V. Otteniamo

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} .$$

È sufficiente trovare un vettore numerico che posto in colonna aumenti il rango di M. Osservando che il minore di ordine 2 in alto è diverso da zero, possiamo semplicemente aggiungere la colonna $(0,0,1)^t$. Attenzione! Ora occorre leggere il vettore numerico (le coordinate) $(0,0,1)$ nella base assegnata per V. La risposta corretta è dunque $0\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2 + 1\underline{v}_3$, cioè il vettore $\underline{v}_3$.

6. Esibire una base di autovettori per l'applicazione $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ che trasforma i tre vettori ordinati della base canonica rispettivamente in $(0,0,0)$, $(0,0,0)$, $(5,6,7)$. È possibile esibire una base ortogonale?

Sol. Potremmo costruire e studiare la matrice di f rispetto alle basi canoniche del dominio e anche del codominio, ma in alternativa osserviamo che il nucleo di f è il sottospazio $\langle (1,0,0),(0,1,0)\rangle$; dunque disponiamo già di una base dell'autospazio di $\lambda = 0$. Il secondo autospazio non è altro che $\langle (5,6,7)\rangle = Im(f)$ (interpretiamo $Im(f)$ come un sottospazio del dominio, non del codominio). Infatti il processo trasforma lo spazio nella retta r di equazioni parametriche $(x,y,z) = t(5,6,7)$, quindi i vettori che mantengono la propria direzione sono tutti e soli quelli che già nel dominio erano diretti come r. Insomma, se comincia a piovere in una piazza affollata, il processo della pioggia trasforma ogni oggetto o persona asciutta in una entità bagnata, ma l'acqua della vasca della fontana non viene trasformata perché era bagnata in partenza! Quell'acqua è rimasta se stessa, a meno di un fattore (forse il livello è salito...).

Non è possibile trovare una base ortogonale perché il terzo autovettore dovrebbe essere proporzionale a $(0,0,1)$.

7. Di una funzione f definita da $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^3$ è noto che $f(2,3) = f(3,4) = f(5,6) = (1,0,0)$. Possiamo essere certi che questa funzione è lineare? Possiamo essere certi che questa funzione non è lineare? Essa, più debolmente, *potrebbe* essere lineare anche se non è sicuro che lo sia?

Sol. Un'applicazione lineare dipende dall'effetto sui vettori di una base qualunque del dominio. Consideriamo la base $\mathcal{B} = \{(2,3),(3,4)\}$. Se f fosse lineare, dopo aver trovato le coordinate $-2,3$ di $(5,6)$ rispetto a $\mathcal{B}$ saremmo autorizzati a dedurre (senza leggere affatto il testo dell'esercizio!) che $f(5,6) = -2f(2,3) + 3f(3,4) = (-2,0,0) + (3,0,0) = (1,0,0)$. Dunque non troviamo una contraddizione col testo dell'esercizio e f, in definitiva, potrebbe essere lineare. Non è sicuro che f lo sia veramente, perché non conosciamo il comportamento di f su tutto il dominio ma solo su un vettore diverso dai due vettori della base. Se ad esempio come ulteriore informazione sapessimo che $f(4,6) = (1,0,0)$ anziché $(2,0,0)$, la linearità sarebbe compromessa. Avremmo trovato un difetto. Invece non sappiamo nulla su f, al di fuori dei dati del testo. In conclusione, avendo trovato una condizione necessaria ma non sufficiente per la linearità, possiamo soltanto dire che f ha superato uno degli infiniti test e potrebbe essere lineare.