

**Es. supplementare 1.** Dimostrare che

$$S = \{(a + 3b - c, 2a + c, 3a + b + c) : a, b, c \in \mathbf{R}\}$$

è un sottospazio di  $\mathbf{R}^3$  e determinarne una base.

**Sol.** Sostituendo 1 al posto di uno dei tre parametri e 0 altrove otteniamo tre vettori che risultano essere generatori di  $S$ . Infatti,  $a(1, 2, 3) + b(3, 0, 1) + c(-1, 1, 1) = (a + 3b - c, 2a + c, 3a + b + c)$ ; in altri termini,  $S = \langle (1, 2, 3), (3, 0, 1), (-1, 1, 1) \rangle$ , quindi  $S$  è un sottospazio perché è il sottospazio generato da alcuni vettori. Questi tre generatori sono tuttavia linearmente dipendenti, dato che il determinante della matrice che li contiene come righe vale 0. Per ottenere una base occorre selezionare due vettori non proporzionali (due vettori qualunque, nel nostro caso).

**Es. supplementare 2.** (BOZZA) Un gruppo è un insieme  $G$  munito di un'operazione binaria " $\cdot$ " che sia associativa e inoltre preveda l'esistenza di un elemento neutro  $e$  tale che  $e \cdot g = g \cdot e = g \forall g \in G$  e anche l'esistenza di un elemento inverso  $g^{-1}$ , per ogni  $g \in G$ , tale che  $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ . Ad es. l'insieme dei numeri interi  $\mathbf{Z}$  è un gruppo rispetto all'operazione di somma; in questo caso il simbolo  $\cdot$  diviene  $+$  per dare risalto alla *commutatività* che invece in generale non vale (infatti essa non è prevista negli assiomi di gruppo). Oltretutto, il prodotto in  $\mathbf{Z}$  ha un significato diverso e non dà luogo a un gruppo (perché?).

Con queste premesse, dimostrare che l'insieme delle matrici cosiddette *ortogonali* di ordine fissato  $n$  (le matrici invertibili  $M$  di ordine  $n$  tali che  $M^{-1} = M^t$ ) formano un gruppo  $\mathcal{O}_n$  non commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto tra matrici.

**Sol.** Il primo problema da affrontare è la chiusura rispetto all'operazione data (è un problema che ricorda quello della chiusura in un sottospazio, ma la situazione è diversa). Date  $A$  e  $B$  in  $\mathcal{O}_n$ , abbiamo che  $(AB)^t = B^t A^t = B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1}$  (soltanto il secondo = utilizza la definizione di matrice ortogonale; il resto segue da proprietà generali delle matrici non necessariamente ortogonali); dunque la chiusura è verificata. Ora, l'associatività in  $\mathcal{O}_n$  viene ereditata dall'associatività in vigore nell'insieme  $\mathcal{M}_{n,n}$  di tutte le matrici di ordine  $n$ . L'elemento neutro è proprio  $I_n$ ; questa matrice infatti svolge bene il suo lavoro in  $\mathcal{M}_{n,n}$  ed è in effetti ortogonale. Infine, l'inversa di una matrice ortogonale  $A$  soddisfa  $(A^{-1})^{-1} = A = (A^t)^t = (A^{-1})^t$ , dunque  $A^{-1}$  è anch'essa una matrice ortogonale.

Il prodotto non è commutativo. Attenzione: ciò non segue automaticamente dalla mancanza di commutatività in  $\mathcal{M}_{n,n}$ : ad esempio nel sottoinsieme delle matrici diagonali, il prodotto diventa commutativo! Occorre invece esibire controesempi come

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La creazione di questo controesempio può apparire inizialmente artefatta, ma dal punto di vista geometrico la lettura è semplice: stiamo componendo una rotazione di  $60^\circ$  con una riflessione (scambio degli assi cartesiani) e la sequenza di esecuzione dei due passaggi è cruciale. Osserviamo che le matrici ortogonali di ordine 2 rappresentano precisamente le rotazioni e le riflessioni eventualmente combinate tra loro.

**Es. supplementare 3.** (BOZZA) Tra i piani contenenti l'asse  $x$ , determinare (con un'equazione cartesiana) quelli che formano un angolo di  $45^\circ$  col piano  $\pi : 2x + 3y - 4z - 2 = 0$ .

**Sol.** Utilizziamo il fascio di piani contenente l'asse  $x$ ; esso è definito dall'equazione  $\lambda y + \mu z = 0$ . Imponiamo che il vettore  $(a, b, c)$  di questo fascio formi un angolo di  $45^\circ$  o di  $135^\circ$  con  $(2, 3, -4)$ :

$$\frac{|(0, \lambda, \mu) \times (2, 3, -4)|}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \sqrt{29}} = \cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dopo alcuni calcoli otteniamo l'equazione  $11\lambda^2 + 48\lambda\mu - 3\mu^2 = 0$ . Poniamo  $\mu = 1$ . Ciò equivale a supporre  $\mu \neq 0$ , col vantaggio di poter dividere i termini dell'equazione per  $\mu$ , restando con un solo parametro  $\hat{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu}$ . Questa scelta è corretta perché comunque  $\mu = 0$  non risolve l'equazione. In alternativa possiamo risolvere l'equazione interpretando  $\lambda$  come incognita e  $\mu$  come parametro, appesantendo i calcoli e il risultato, per poi sostituire alla fine  $\mu$  con un valore, ad es. 1. Tornando all'equazione semplificata  $11\lambda + 48\lambda - 3 = 0$ , otteniamo le soluzioni  $\frac{-24 \pm \sqrt{609}}{11}$ . Ciascuno dei due valori di  $\lambda$ , insieme a  $\mu = 1$ , identifica un piano idoneo (potremmo sostituire i valori nell'equazione del fascio, ma il problema può essere considerato risolto già a questo livello).