Nome: .................................................... Cognome: .....................................................................

Matricola: ................................................ Firma: .......................................................................

*Consegnare soltanto la bella copia; utilizzare al massimo due fogli protocollo.*

**Lasciare uno spazio di circa 5 cm all'inizio, con nome e cognome.**

*INSERIRE il presente foglietto; non occorre poi piegare il foglio di bella copia.*

PARTE 1. *Quesiti (rispondere soltanto su questo foglietto, senza giustificazioni)*

**NOTA**: $-1$ per ogni risposta errata; $+1$ e $+1.5$ risp. per quesiti "Vero/Falso" e quesiti numerici.

⊙ La somma di due autovettori è un autovettore. [ F ]

⊙ Le matrici invertibili, con le usuali operazioni, formano uno spazio vettoriale. [ F ]

⊙ Dimezzando tutti i numeri di una matrice quadrata $4 \times 4$, il suo determinante si dimezza. [ F ]

⊙ Un sistema lineare omogeneo è sempre risolubile. [ V ]

⊙ Calcolare il determinante della matrice inversa di $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. [ $-\frac{1}{21}$ ]

⊙ Calcolare la dimensione del sottospazio $\{\underline{u} \in \mathbf{R}^4 \colon \underline{u} \times (8,7,6,5) = 0\}$. [ 3 ]

⊙ Calcolare il rango di una matrice $9 \times 9$ che contiene tutti 1 ad eccezione di due zeri collocati a piacere sulla diagonale. [ 3 ]

⊙ Calcolare il numero di applicazioni iniettive da un insieme di due elementi a un insieme di tre elementi. [ 6 ]

PARTE 2. **Giustificare le risposte; consegnare soltanto la bella copia.**

[**1**] Sono dati i piani $\pi : x + y + z - 3 = 0$ e $\pi' : y = 9$. Scrivere equazioni cartesiane della retta parallela ad essi e passante per l'origine. Calcolare il coseno dell'angolo acuto formato dall'asse $z$ col piano $\pi$. Tra i punti dell'asse $z$, determinare quelli equidistanti dai due piani.

**Sol.** $x + y + z = y = 0$; $\sqrt{\frac{2}{3}}$; $(0, 0, 3 \pm 9\sqrt{3})$.

[**2**] Mediante un'opportuna rotazione del riferimento, portare in forma canonica la parabola di equazione $3x^2 + 12xy + 12y^2 - x\sqrt{5} + 4 = 0$.

**Sol.** Autovettori: $(1, 2)$ per $\lambda = 15$, $(-2, 1)$ per $\lambda = 0$. Sostituendo le vecchie variabili mediante la legge $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ otteniamo $15X^2 - X + 2Y + 4 = 0$, o meglio

$$Y = -\frac{15}{2}X^2 + \frac{1}{2}X - 2\ .$$

[**3**] Determinare il numero reale $k$ che rende il sottospazio $S = \langle (k, 1, 2, 3, 4), (0, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 0), (2, 1, 2, 7, 7) \rangle$ di dimensione 3. Posto poi $k = 0$, determinare un vettore non nullo di $\mathbf{R}^5$ che sia ortogonale a $S$.

**Sol.** $k = 2$; $(0, -2t, t, 0, 0)$ per ogni $t$ reale;

[**4**] È data l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(x, y, z) = (x - y + z, -x + y - z, x - y + z)$. Calcolare una base *ortogonale* di autovettori per $f$ (essa esiste in virtù del teorema spettrale). Stabilire se $f$ è un'applicazione invertibile.

**Sol.** $\{(1,2,1),(1,0,-1)\}$ (o qualunque altra base ortogonale dell'autospazio di equazione $x-y+z=0$) con l'aggiunta dell'ulteriore autovettore $(1,-1,1)$; non sussiste l'invertibilità perché il rango non vale 3.