Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... **FIRMA**: ....

PARTE 1. *Quesiti* **(rispondere soltanto su questo foglietto, senza alcuna spiegazione aggiuntiva)**

NOTA: -1 per ogni risposta errata; $+1$ e $+1.5$ risp. per quesiti "Vero/Falso" e quesiti numerici.

$\diamondsuit$ Se $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ammette l'autovalore 0, allora f è iniettiva. [F]

$\diamondsuit$ Il prodotto di un vettore colonna per un vettore riga non è ammissibile. [F]

$\diamondsuit$ L'inversa di una matrice diagonale invertibile è ancora una matrice diagonale. [V]

$\diamondsuit$ Due rette sghembe ammettono un piano perpendicolare a entrambe. [F]

$\triangledown$ Calcolare $f(4)$ sapendo che $f : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ è lineare e $f(\pi) = \pi^2$. [4π]

$\triangledown$ Determinare h in modo che l'inversa di $\begin{pmatrix} h & h\sqrt{2} \\ 2 & 7\sqrt{8} \end{pmatrix}$ abbia il determinante uguale a $\sqrt{2}$. [$\frac{1}{24}$]

$\triangledown$ Determinare a in modo che il vettore $(a, a, 1)$ sia parallelo al piano di equazione $x - 41 = 0$. [0]

$\triangledown$ Calcolare il minimo numero di equazioni (non del tipo banale $0 = c$) in un sistema lineare, con 5 incognite, che non ammetta soluzione. [2]

PARTE 1. *Quesiti* **(rispondere soltanto su questo foglietto, senza alcuna spiegazione aggiuntiva)**

NOTA: -1 per ogni risposta errata; $+1$ e $+1.5$ risp. per quesiti "Vero/Falso" e quesiti numerici.

$\diamondsuit$ Se $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ammette l'autovalore 0, allora f è suriettiva. [F]

$\diamondsuit$ Il prodotto di un vettore riga per un vettore colonna non è mai ammissibile. [F]

$\diamondsuit$ L'inversa di una matrice diagonale può coincidere con la matrice iniziale. [V]

$\diamondsuit$ Due rette sghembe ammettono infinite rette incidenti e perpendicolari a entrambe. [F]

$\triangledown$ Calcolare $f(4)$ sapendo che $f : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ è lineare e $f(\pi) = -\pi$. [-4]

$\triangledown$ Determinare h in modo che l'inversa di $\begin{pmatrix} h & h\sqrt{3} \\ 2 & 4\sqrt{27} \end{pmatrix}$ abbia il determinante uguale a $\sqrt{3}$. [$\frac{1}{30}$]

$\triangledown$ Determinare a in modo che il vettore $(a, a, 9)$ sia parallelo al piano di equazione $x + y + z + 5 = 0$. [$-\frac{9}{2}$]

$\triangledown$ Calcolare il minimo numero di equazioni in un sistema lineare con 4 incognite che ammetta un'unica soluzione. [4]

PARTE 1. *Quesiti* **(rispondere soltanto su questo foglietto, senza alcuna spiegazione aggiuntiva)**

NOTA: -1 per ogni risposta errata; $+1$ e $+1.5$ risp. per quesiti "Vero/Falso" e quesiti numerici.

$\diamondsuit$ Se $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ammette l'autovalore 0, allora f non è iniettiva. [V]

$\diamondsuit$ Il prodotto di un vettore colonna per un vettore riga è uguale a una matrice. [V]

$\diamondsuit$ Il prodotto di due matrici 4×4 diagonali è ancora una matrice diagonale. [V]

$\diamondsuit$ Due rette sghembe ammettono una retta incidente e perpendicolare a entrambe. [V]

$\bigtriangledown$ Calcolare $f(1)$ sapendo che $f : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ è lineare e $f(\pi) = \pi^3$. [π^2]

$\bigtriangledown$ Determinare h in modo che l'inversa di $\begin{pmatrix} h & h\sqrt{5} \\ 1 & \sqrt{125} \end{pmatrix}$ abbia il determinante uguale a $\sqrt{5}$. [$\frac{1}{20}$]

$\bigtriangledown$ Determinare a in modo che il vettore $(a+1, a+1, 1)$ sia parallelo al piano di equazione $x + 23 = 0$. [-1]

$\bigtriangledown$ Calcolare il massimo numero di pivot relativo alla matrice completa di un sistema di 6 equazioni in 4 incognite. [5]

PARTE 1. *Quesiti* **(rispondere soltanto su questo foglietto, senza alcuna spiegazione aggiuntiva)**

NOTA: -1 per ogni risposta errata; $+1$ e $+1.5$ risp. per quesiti "Vero/Falso" e quesiti numerici.

$\diamondsuit$ Se $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ammette l'autovalore 0, allora f non è suriettiva. [V]

$\diamondsuit$ Il prodotto di un vettore colonna per un vettore riga è sempre ammissibile. [V]

$\diamondsuit$ Se il prodotto di due matrici è la matrice nulla, una delle due matrici è nulla. [F]

$\diamondsuit$ Due rette sghembe ammettono esattamente due piani paralleli a entrambe. [F]

$\bigtriangledown$ Calcolare $f(0)$ sapendo che $f : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ è lineare e $f(4) = 6$. [0]

$\bigtriangledown$ Determinare h in modo che l'inversa di $\begin{pmatrix} h & h\sqrt{2} \\ 4 & 14\sqrt{8} \end{pmatrix}$ abbia il determinante uguale a $\sqrt{2}$. [$\frac{1}{48}$]

$\bigtriangledown$ Determinare a in modo che il vettore $(a-1, a-1, 1)$ sia parallelo al piano di equazione $y - 41 = 0$. [1]

$\bigtriangledown$ Calcolare il massimo numero di pivot relativo alla matrice completa di un sistema in 5 incognite che non ammetta soluzione. [6]

PARTE 2. **In questa parte, $\boxed{\text{giustificare}}$ le risposte; consegnare soltanto la bella copia.**

Lasciare uno spazio all'inizio, con nome e cognome.

Allegare il presente foglietto; non occorre poi piegare il foglio di bella copia.

Punteggio totale: **22**

1. In un riferimento $Oxyz$ sono dati i punti $A = (\sqrt{2}, 2, 1)$, $B = (\sqrt{2}, 0, 0)$, $C = (\sqrt{2}, 4, 3)$.
[1.5]: Stabilire se essi sono allineati.

[3]: Scrivere un'equazione cartesiana del piano parallelo alla retta $r : \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$ e contenente i punti A, B.

[2]: Stabilire se r forma un angolo di 90° con la retta descritta dal punto mobile $P(t) = (3 + t\sqrt{5}, 3 + t\sqrt{5}, 2 - t\sqrt{20})$.

Sol. $\overrightarrow{BA} = (0, 2, 1)$, $\overrightarrow{BC} = (0, 4, 3)$, quindi non sussiste la proporzionalità: i tre punti non sono allineati.

Un vettore direttore di r soddisfa il relativo sistema omogeneo, quindi possiamo scegliere $(1, 1, 1)$. Ora abbiamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ x - \sqrt{2} & y - 0 & z - 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \sqrt{2} - x - y + 2z = 0 \ .$$

Infine, calcoliamo

$$(1, 1, 1) \times (\sqrt{5}, \sqrt{5}, -\sqrt{20}) = 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 0 \ .$$

L'angolo è quindi retto.

2. È data l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(x, y, z) = (x + y + z, 3y - 2z, 3y - 2z)$.
[2.5]: Calcolare due autovettori linearmente indipendenti di f.
[2.5]: Stabilire se esiste $v \in \mathbf{R}$ tale che $(v, 6, 6)$ non appartenga all'immagine di f.

Sol.

$$\begin{vmatrix} 1 - s & 1 & 1 \\ 0 & 3 - s & -2 \\ 0 & 3 & -2 - s \end{vmatrix} = (1 - s)(s^2 - s) = 0 \Rightarrow s \in \{0, 1\}.$$

Per $s = 0$ otteniamo l'autospazio $\langle(-5, 2, 3)\rangle$ — si tratta del nucleo — mentre la molteplicità geometrica di $s = 1$ vale soltanto 1 e otteniamo l'autospazio $\langle(1, 0, 0)\rangle$.

Il vettore $(v, 6, 6)$ non porta in alcun caso all'aumento del rango nella matrice completa, quindi non esiste alcun valore idoneo di v.

3. [3]: Utilizzando una rotazione del riferimento Oxy, portare in forma canonica la parabola di equazione $9x^2 + 12xy + 4y^2 - x\sqrt{13} - 4 = 0$.

Sol. Autovettori di $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$: $(3, 2)$ per $\lambda = 13$, $(-2, 3)$ per $\lambda = 0$. Mediante la rotazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

otteniamo

$$13X^2 + 0Y^2 - \sqrt{13} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}(3X - 2Y) - 4 = 0 \Rightarrow Y = -\frac{13}{2}X^2 + \frac{3}{2}X + 2 \ .$$

4. [2.5]: Scrivere equazioni cartesiane (il minimo numero) del sottospazio $S = \langle(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (3, 3, 3, 2)\rangle$.
[2.5]: Calcolare la proiezione ortogonale di $(1, 0, 0, 0)$ su S.

Sol. Eliminiamo il terzo vettore, generato dagli altri due. Scriviamo le equazioni parametriche e assorbiamo i parametri:

$$\begin{cases} x = s + t \\ y = s + t \\ w = s + t \\ z = s \end{cases} \Rightarrow t = x - s \Rightarrow \begin{cases} y = z + (x - z) \\ w = z + (x - z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ w = x \end{cases} .$$

Successivamente, ortogonalizziamo il primo vettore rispetto al secondo, ottenendo il nuovo vettore

$$(1,1,1,1) - \frac{3}{3}(1,1,1,0) = (0,0,0,1) .$$

Ora la proiezione risulta uguale a

$$\frac{1}{3}(1,1,1,0) + \frac{0}{1}(0,0,0,1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) .$$

5. [2.5]: Data la funzione lineare $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^1$ tale che $g(1,1) = 3$ e $g(2,1) = 6$, determinare un vettore non nullo di $\mathbf{R}^2$ che appartenga al nucleo di g.

Sol. Osserviamo che $1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 0$, quindi è sufficiente considerare il vettore $1 \cdot (2,1) - 2 \cdot (1,1) = (0,-1)$. Infatti

$$g(0,-1) = g(1(2,1) - 2(1,1)) = 1g(2,1) - 2g(1,1) = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 0 .$$

PARTE 2. **In questa parte, $\boxed{\text{giustificare}}$ le risposte; consegnare soltanto la bella copia.**

Lasciare uno spazio all'inizio, con nome e cognome.

Allegare il presente foglietto; non occorre poi piegare il foglio di bella copia.

Punteggio totale: **22**

1. In un riferimento $Oxyz$ sono dati i punti $A = (1, 2, \sqrt{2})$, $B = (0, 0, \sqrt{2})$, $C = (3, 4, \sqrt{2})$.
[1.5]: Stabilire se essi sono allineati.
[3]: Scrivere un'equazione cartesiana del piano parallelo alla retta $r : \begin{cases} y - z = 0 \\ x - y = -1 \end{cases}$ e contenente i punti A, B.
[2]: Dimostrare che r forma un angolo di 90° con la retta descritta dal punto mobile $P(t) = (2 - t\sqrt{20}, 3 + t\sqrt{5}, 3 + t\sqrt{5})$

Sol. $\overrightarrow{BA} = (1,2,0)$, $\overrightarrow{BC} = (3,4,0)$, quindi non sussiste la proporzionalità: i tre punti non sono allineati.

Un vettore direttore di r soddisfa il relativo sistema omogeneo, quindi possiamo scegliere $(1,1,1)$. Ora abbiamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ x - 0 & y - 0 & z - \sqrt{2} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - y - z + \sqrt{2} = 0 .$$

Infine, calcoliamo

$$(1,1,1) \times (-\sqrt{20}, \sqrt{5}, \sqrt{5}) = -2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 0 .$$

2. È data l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(x,y,z) = (x + y + z, 2y - z, 2y - z)$.
[2.5]: Calcolare due autovettori linearmente indipendenti di f.
[2.5]: Stabilire se esiste $v \in \mathbf{R}$ tale che $(v, 3, 3)$ non appartenga all'immagine di f.

Sol.

$$\begin{vmatrix} 1 - s & 1 & 1 \\ 0 & 2 - s & -1 \\ 0 & 2 & -1 - s \end{vmatrix} = (1 - s)(s^2 - s) = 0 \Rightarrow s \in \{0, 1\}.$$

Per $s = 0$ otteniamo l'autospazio $\langle(-3,1,2)\rangle$ — si tratta del nucleo — mentre la molteplicità geometrica di $s = 1$ vale soltanto 1 e otteniamo l'autospazio $\langle(1,0,0)\rangle$.

Il vettore $(v,3,3)$ non porta in alcun caso all'aumento del rango nella matrice completa, quindi non esiste alcun valore idoneo di v.

3. [3]: Utilizzando una rotazione del riferimento Oxy, portare in forma canonica la parabola di equazione $4x^2 + 12xy + 9y^2 - y\sqrt{13} - 4 = 0$.

Sol. Autovettori di $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$: $(2,3)$ per $\lambda = 13$, $(-3,2)$ per $\lambda = 0$. Mediante la rotazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

otteniamo

$$13X^2 + 0Y^2 - \sqrt{13} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}(3X + 2Y) - 4 = 0 \ \Rightarrow\ Y = \frac{13}{2}X^2 - \frac{3}{2}X - 2\ .$$

4. [3]: Scrivere equazioni cartesiane (il minimo numero) del sottospazio $S = \langle(1,1,1,1),(0,1,1,1),(2,3,3,3)\rangle$.

[2]: Calcolare la proiezione ortogonale di $(0,0,0,1)$ su S.

Sol. Eliminiamo il terzo vettore, generato dagli altri due. Scriviamo le equazioni parametriche e assorbiamo i parametri:

$$\begin{cases} x = s \\ y = s + t \\ w = s + t \\ z = s + t \end{cases} \Rightarrow\ t = z - s\ \Rightarrow \begin{cases} y = x + (z - x) \\ w = x + (z - x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = z \\ w = z \end{cases} .$$

Successivamente, ortogonalizziamo il primo vettore rispetto al secondo, ottenendo il nuovo vettore

$$(1,1,1,1) - \frac{3}{3}(0,1,1,1) = (1,0,0,0)\ .$$

Ora la proiezione risulta uguale a

$$\frac{0}{1}(1,0,0,0) + \frac{1}{3}(0,1,1,1) = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\ .$$

5. [2.5]: Data la funzione lineare $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^1$ tale che $g(1,1) = 6$ e $g(2,1) = 3$, determinare un vettore non nullo di $\mathbf{R}^2$ che appartenga al nucleo di g.

Sol. Osserviamo che $1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 0$, quindi è sufficiente considerare il vettore $1 \cdot (1,1) - 2 \cdot (2,1) = (-3,-1)$. Infatti

$$g(-3,-1) = g(1(1,1) - 2(2,1)) = 1g(1,1) - 2g(2,1) = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 0\ .$$