Sapienza Università di Roma

Programma di Geometria per il corso di Ingegneria Energetica, a.a. 2019-2020

docente: Andrea Vietri

Se non specificato con **dim.**, le dimostrazioni presenti nel testo di riferimento possono essere considerate un approfondimento facoltativo (alcune di queste dimostrazioni sono state tuttavia presentate, in modo sintetico, durante il corso). Sono facoltativi anche tutti gli approfondimenti indicati con “approf.”.

Matrici. Definizione di matrice e relativa simbologia. Operazioni con matrici. Matrici particolari (simmetriche, diagonali, ecc.). Determinante (definito mediante il primo teorema di Laplace) e sue principali proprietà. Definizione del determinante mediante le permutazioni (approf.). Complementi algebrici. Secondo teorema di Laplace. Teorema di Binet. Matrice inversa. Riduzione a scala (metodo di Gauss). Rango per pivot. Rango per minori. Teorema degli orlati. Calcolo della matrice inversa mediante la doppia riduzione a scala (metodo di Gauss-Jordan).

Vettori, spazi vettoriali, sottospazi. Vettori, spazi vettoriali. Vettori numerici e spazi vettoriali $\mathbf{R}^n$. Operazioni con vettori. Esempi di spazi vettoriali. Combinazioni lineari. Dipendenza e indipendenza lineare. Rango per righe e rango per colonne di una matrice. Basi di spazi vettoriali. Base canonica e altre basi in $\mathbf{R}^n$. Coordinate di un vettore rispetto a una data base. Sottospazi. Equazioni cartesiane e parametriche di sottospazi di $\mathbf{R}^n$. Sottospazio generato da alcuni vettori. Intersezione di sottospazi. Spazi vettoriali generali e loro sottospazi (es. i polinomi di grado non superiore a 4, le funzioni derivabili, ecc. – approf.).

Sistemi lineari. Matrice incompleta e matrice completa di un sistema lineare. Sistemi lineari omogenei e relazione con i sottospazi di $\mathbf{R}^n$. Teorema di Cramer (**dim.** utilizzando la matrice inversa). Riduzione a scala per la soluzione di un sistema lineare. Teorema di Rouché-Capelli (**dim.** utilizzando il rango per pivot). **Dim.** del medesimo teorema attraverso il rango per colonne (approf.). Scelta dei parametri per le soluzioni. Simbolo ∞^p. Discussione di sistemi lineari con coefficienti parametrici.

Vettori geometrici. Vettori geometrici liberi e vettori applicati, nel piano e nello spazio. Vettori come elementi dell’insieme quoziente rispetto alla relazione di sovrapponibilità (approf.). Relazioni, grafi, matrici di grafi (approf.). Coordinate in un riferimento. Vettori **i**, **j**, **k**. Rappresentazione di punti e di vettori geometrici. Vettore geometrico che ha come estremi due punti ordinati. Lunghezza di un vettore geometrico. Distanza tra punti. Versori e normalizzazione. Proiezione ortogonale (numerica) di un vettore sulla retta definita da un altro vettore. Prodotto scalare tra vettori geometrici e sua formula cartesiana (**dim.** utilizzando la proiezione ortogonale, solo per vettori di dimensione 2). Parallelismo di due vettori, complanarità (nello spazio) di tre vettori. Angolo tra due vettori e calcolo del suo coseno.

Geometria del piano. Forma cartesiana (implicita ed esplicita), forma parametrica di una retta. Quota e coefficiente angolare. Eliminazione (assorbimento) del parametro per passare da forma parametrica a cartesiana. Risoluzione di un sistema (di una sola equazione) per il processo inverso. Parallelismo, perpendicolarità tra rette. Giacitura (retta passante per l’origine e parallela alla retta data). Fasci propri e impropri di rette. Equazioni di rette con specifiche iniziali. Allineamento di punti. Vettore normale (o perpendicolare) a una retta. Distanza tra un punto e una retta (**dim.** per l'analoga distanza tra punto e piano, nello spazio). Interpretazione geometrica di un sistema lineare in due incognite, come intersezione di rette.

Geometria dello spazio. Forma cartesiana, forma parametrica di un piano. Piani paralleli. Mutue posizioni di due piani. Punti allineati, punti complanari. Vettori direttori di rette. Forma cartesiana e parametrica di una retta. Assorbimento del parametro per passare da forma parametrica a cartesiana. Risoluzione di un sistema (di due equazioni) per il processo inverso. Parallelismo di rette. Fasci propri e impropri di piani. Fasci e stelle di rette (approf.). Equazioni di rette o piani con specifiche iniziali. Giacitura (piano o retta passante per l'origine e parallelo al piano o alla retta data). Rette sghembe. Mutue posizioni di rette (**dim.** del relativo teorema, sulle 4 configurazioni). Parallelismo tra retta e piano. Mutue posizioni di retta e piano. Vettore normale a un piano. Piani perpendicolari. Rette perpendicolari a un piano. Distanza tra un punto e un piano (**dim.** utilizzando un punto qualsiasi nel piano, ecc.). Distanza tra un punto e una retta. Distanza tra rette parallele. Distanza minima tra rette sghembe. Interpretazione geometrica di sistemi lineari in tre incognite. Angolo tra due piani, tra due rette, tra un piano e una retta – calcolo del coseno.

Sottospazi di $\mathbf{R}^n$: intersezione, somma, ortogonalità. Prodotto scalare standard in $\mathbf{R}^n$. Vettori ortogonali. Sottospazio ortogonale a un dato sottospazio, e sue equazioni cartesiane. Somma di sottospazi. Somma diretta. Relazione di Grassmann (**dim.** lasciando l'indipendenza lineare dei vettori complessivi come approf.). Prodotto vettoriale (**dim.** della formula, lasciando la distributività come approf.). Area di un parallelogramma nello spazio. Volume di un parallelepipedo e prodotto misto (approf.). Basi ortogonali. Basi ortonormali. Proiezione ortogonale e componente ortogonale di un vettore rispetto a un sottospazio. Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Coefficienti di Fourier. Decomposizione di uno spazio $\mathbf{R}^n$ come somma diretta di un dato sottospazio e del suo sottospazio ortogonale (conseguente unicità della decomposizione in proiezione e componente ortogonale, dato un vettore).

Insiemi e funzioni (o applicazioni). Insiemi e (approfondimento) relazioni. Dominio, codominio, immagine, controimmagine. Applicazioni iniettive, suriettive, biiettive. Composizione di applicazioni. Invertibilità.

Applicazioni lineari. Applicazioni lineari tra spazi vettoriali generali. Applicazioni lineari da $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$. Matrice associata ad una applicazione lineare, rispetto a una base del dominio e ad una del codominio (essa svolge esattamente il compito dell'applicazione – approf.). Composizione di applicazioni lineari e prodotto delle relative matrici. Nucleo e immagine. Iniettività, suriettività di un'applicazione lineare e loro relazione col rango della matrice associata. Legame tra il nucleo e l'iniettività (**dim.** dell'unicità della controimmagine utilizzando il rango del sistema omogeneo associato). Matrice inversa per l'applicazione inversa. Descrizione geometrica di un'applicazione lineare, se le dimensioni del dominio e del codominio sono minori o uguali a 3. Isomorfismi tra spazi vettoriali (cenno). Esempio di isomorfismo: $\mathbf{R}^2$ e un piano contenuto in $\mathbf{R}^3$.

Cambiamenti di coordinate. Matrice del cambiamento di coordinate e significato della sua inversa. Matrice di un'applicazione lineare rispetto a due nuove basi nel dominio e nel codominio, o ad una nuova base solo nel dominio o solo nel codominio. Rotazioni e (approf.) riflessioni di un riferimento cartesiano. Traslazioni (approf.).

Autovettori e diagonalizzazione. Autovettori e autovalori di un'applicazione lineare (endomorfismo) tra spazi vettoriali uguali. Diagonalizzazione mediante un opportuno cambiamento di base (**dim.** della formula per il calcolo degli autovettori e della conseguente diagonalizzazione). Polinomio caratteristico. Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica. Diagonalizzazione di applicazioni la cui matrice è simmetrica (teorema spettrale). Matrici ortogonali.

Coniche e cenni sulle quadriche. Coniche come sezioni di un cono a due falde. Definizione di una conica mediante i due fuochi (per ellisse e iperbole) e mediante fuoco e direttrice (anche per la parabola). Eccentricità. Forme canoniche di coniche ottenute a partire dalle definizioni geometriche e relative formule (esempio esplicito dell'ellisse). Rotazioni del riferimento e loro effetto sull'equazione di una conica. Riflessioni (approf.). Traslazioni (approf.). Coniche degeneri (approf.). Equazione generica della sfera e analogia con la circonferenza. Cenno al modello della geometria proiettiva in cui i tre tipi di conica si riducono a un solo tipo. Matrice associata a una conica in forma generale e processo di riduzione a forma canonica (sia con un esplicito cambiamento di coordinate, che con il calcolo del determinante invariante nel caso delle coniche a centro). Quadriche. Matrice di ordine 4 associata a una quadrica e significato degli autovalori della matrice quadratica (di ordine 3). Sintesi sulle 5 quadriche non degeneri con un cenno ai punti ellittici e iperbolici.