Nota: l'esercizio sulle applicazioni lineari verrà valutato considerando anche le difficoltà causate dalla correzione effettuata in aula e dalla nota sulla regola di Ruffini.

⊙ Le matrici invertibili di ordine 2 formano un sottospazio nello spazio vettoriale delle matrici di ordine 2. [F]

⊙ La composizione di due funzioni suriettive è una funzione suriettiva. [V]

⊙ Il nucleo di un'applicazione lineare suriettiva ha dimensione maggiore di 0. [F]

⊙ Il prodotto scalare di due versori non può essere negativo. [F]

⊙ Calcolare la proiezione ortogonale (scalare positivo) di $2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ sulla retta $r : x + y = y + z - 3 = 0$. [$\sqrt{3}$]

⊙ Calcolare l'area del triangolo di vertici $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 3)$, $(3, 2, 1)$. [$2\sqrt{6}$]

⊙ Calcolare la dimensione del sottospazio $\langle(1, 0),(2, 0)\rangle + \langle(0, 1),(0, 2)\rangle$. [2]

⊙ Calcolare la seconda coordinata del vettore $(2, 3, 3, \sqrt{2})$ rispetto alla base $\{(1, 0, 0, 0),(0, 2, 1, 0),(0, 1, 2, 0),(0, 0, 0, 8)\}$. [1]

....

⊙ Le matrici diagonali di ordine 3 formano un sottospazio nello spazio vettoriale delle matrici di ordine 3. [V]

⊙ La composizione di due applicazioni lineari è un'applicazione lineare. [V]

⊙ Il nucleo di un'applicazione lineare iniettiva può avere dimensione 1. [F]

⊙ Il prodotto scalare di due versori può valere -1. [V]

⊙ Calcolare la proiezione ortogonale (scalare positivo) di $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ sulla retta $r : x + y = y + z - 4 = 0$. [$\frac{5}{\sqrt{3}}$]

⊙ Calcolare l'area del triangolo di vertici $(0, 0, 0)$, $(1, 5, 3)$, $(3, 5, 1)$. [$\sqrt{66}$]

⊙ Calcolare la dimensione del sottospazio $\langle(1, 0),(2, 0)\rangle + \langle(1, 0),(3, 0)\rangle$. [1]

⊙ Calcolare la terza coordinata del vettore $(2, 6, 6, \sqrt{2})$ rispetto alla base $\{(1, 0, 0, 0),(0, 2, 1, 0),(0, 1, 2, 0),(0, 0, 0, 8)\}$. [2]

....

⊙ Le matrici ortogonali di ordine 2 formano un sottospazio nello spazio vettoriale delle matrici di ordine 2. [F]

⊙ Un'applicazione lineare invertibile ammette sempre autovettori. [F]

⊙ Il nucleo di un'applicazione lineare iniettiva ha dimensione 0. [V]

⊙ Il prodotto scalare di due vettori proporzionali può valere -2. [V]

⊙ Calcolare la proiezione ortogonale (scalare positivo) di $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ sulla retta $r : x + y = y + z + 5 = 0$. [$\frac{1}{\sqrt{3}}$]

⊙ Calcolare l'area del triangolo di vertici $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 4)$, $(4, 2, 1)$. [$\frac{3}{2}\sqrt{33}$]

⊙ Calcolare la dimensione del sottospazio $\langle(0, 1, 0),(2, 0, 0)\rangle + \langle(0, 0, 1),(5, 5, 5)\rangle$. [3]

⊙ Calcolare la seconda coordinata del vettore $(2, 4, 0, \sqrt{2})$ rispetto alla base $\{(1, 0, 0, 0),(0, 1, 1, 0),(0, 1, -1, 0),(0, 0, 0, 8)\}$. [2]

....

$\odot$ La somma di due matrici invertibili di ordine 2 è una matrice invertibile. [F]

$\odot$ Il doppio di un autovettore è un autovettore. [V]

$\odot$ Il nucleo di un'applicazione lineare suriettiva può avere dimensione 1. [V]

$\odot$ Il prodotto scalare di due versori può valere $-\sqrt{2}$. [F]

$\odot$ Calcolare la proiezione ortogonale (scalare positivo) di $4\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ sulla retta $r: x+y=y+z+1=0$. [$\frac{4}{\sqrt{3}}$]

$\odot$ Calcolare l'area del triangolo di vertici $(0,0,0)$, $(2,2,3)$, $(3,2,2)$. [$\frac{\sqrt{33}}{2}$]

$\odot$ Calcolare la dimensione del sottospazio $\langle(1,0,0),(2,0,0)\rangle+\langle(0,5,5),(0,1,1)\rangle$. [2]

$\odot$ Calcolare la terza coordinata del vettore $(2,0,4,\sqrt{2})$ rispetto alla base $\{(1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,1,-1,0),(0,0,0,8)\}$. [$-2$]

....

1. Dato un riferimento cartesiano $Oxyz$, scrivere equazioni cartesiane della retta contenuta nel piano $\pi: 2x-y+3z-1=0$, passante per $P=(2,3,0)$ e perpendicolare al vettore $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$. Successivamente determinare i punti dell'asse y che hanno distanza $\sqrt{56}$ da π. Infine scrivere equazioni cartesiane dei due piani che contengono l'asse y e formano un angolo di $45°$ con π.

Sol. La retta è contenuta in π e nel piano π' che passa per P ed è perpendicolare al vettore dato; un'equazione di π' è $x+y+z-5=0$. La risposta è dunque il sistema $\pi\cap\pi'$. Imponendo che il punto $(0,t,0)$ abbia la distanza richiesta – utilizziamo la formula della distanza punto-piano – otteniamo $|t+1|=\sqrt{14}\sqrt{56}=28$, dunque $t=-29$ e $t=27$. Il fascio di piani contenenti l'asse y è definito da $\lambda x+\mu z=0$. Supponendo che μ non sia nullo possiamo porlo uguale a 1 (equivalentemente, dividiamo per μ) ottenendo

$$\frac{|(\lambda,0,1)\times(2,-1,3)|}{\sqrt{\lambda^2+1}\sqrt{14}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ .$$

Troviamo così due valori per λ: $\frac{6\pm\sqrt{42}}{3}$.

2. Data l'applicazione $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ definita da $f(x,y,z)=(2x,x+y,3x+4y-5z)$, determinarne una base di autovettori. Esibire il prodotto di tre matrici che diagonalizza la matrice di f nelle basi canoniche e scrivere la matrice risultante. Stabilire se esistono coppie di vettori che hanno la stessa immagine secondo f.

Sol. L'equazione caratteristica è $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+5)=0$. I tre rispettivi autovettori possono essere scelti come $(0,3,2)$, $(1,1,1)$ e $(0,0,1)$. Il prodotto richiesto è

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & 4 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}.$$

L'applicazione è biiettiva, in particolare iniettiva, quindi non esistono coppie con la stessa immagine.

3. Calcolare la proiezione ortogonale di $(0,1,0,0)$ sul sottospazio $S=\langle(1,1,1,1),(2,2,2,3),(0,0,0,4)\rangle$. Scrivere (il minimo numero di) equazioni cartesiane di S.

Sol. Possiamo scegliere il primo e il terzo vettore come elementi di una base di S. Ortogonalizziamo $(1,1,1,1)$ rispetto a $(0,0,0,4)$ ottenendo $(1,1,1,1)-\frac{1}{4}(0,0,0,4)=(1,1,1,0)$. Ora possiamo calcolare la proiezione come $0(0,0,0,4)+\frac{1}{3}(1,1,1,0)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)$.

Per trovare due equazioni cartesiane (notiamo infatti che $4 - dim(S)$ vale 2) imponiamo che sia uguale a 2 il rango di

$$\begin{pmatrix} x & y & w & z \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avremmo potuto utilizzare $(1,1,1,1)$ e anche $(0,0,0,4)$ ma conosciamo vettori più semplici che costituiscono comunque una base di S. Orlando la sottomatrice di ordine 2 in basso a destra otteniamo due minori di ordine 3 e infine le equazioni $x - w = y - w = 0$ (meglio: $x = y = w = 0$).

4. Eseguendo una rotazione del riferimento, portare in forma canonica l'iperbole di equazione $2x^2 + 28xy + 23y^2 - 15 = 0$. Determinare le equazioni originali delle direttrici di questa conica.

Sol. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Rightarrow 30X^2 - 5Y^2 - 15 = 0 \Rightarrow 2X^2 - \frac{Y^2}{3} = 1$. Dunque $a^2 = \frac{1}{2}$ e $c = \sqrt{\frac{7}{2}}$; utilizzando la matrice inversa (la trasposta, in questo esercizio) per sostituire la X nelle equazioni $X = \pm\frac{1}{\sqrt{14}}$, otteniamo $\frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) = \pm\frac{1}{\sqrt{14}}$.

....

1. Dato un riferimento cartesiano $Oxyz$, scrivere equazioni cartesiane della retta contenuta nel piano $\pi : 3x - y + 2z - 1 = 0$, passante per $P = (0,3,2)$ e perpendicolare al vettore $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Successivamente determinare i punti dell'asse z che hanno distanza $\sqrt{14}$ da π. Infine dimostrare che non esistono piani che contengano l'asse z e formino un angolo di $30°$ con π.

Sol. La retta è contenuta in π e nel piano π' che passa per P ed è perpendicolare al vettore dato; un'equazione di π' è $x + y + z - 5 = 0$. La risposta è dunque il sistema $\pi \cap \pi'$. Imponendo che il punto $(0,0,t)$ abbia la distanza richiesta – utilizziamo la formula della distanza punto-piano – otteniamo $|2t - 1| = \sqrt{14}\sqrt{14} = 14$, dunque $t = \frac{15}{2}$ e $t = -\frac{13}{2}$. Il fascio di piani contenenti l'asse z è definito da $\lambda x + \mu y = 0$. Supponendo che μ non sia nullo possiamo porlo uguale a 1 (equivalentemente, dividiamo per μ) ottenendo

$$\frac{|(\lambda, 1, 0) \times (3, -1, 2)|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Otteniamo un'equazione che non ammette soluzioni reali: $3\lambda^2 + 12\lambda + 19 = 0$. Neanche $\mu = 0$ risolve il problema; infatti il piano di equazione $x = 0$ non forma l'angolo richiesto.

2. [Modificato in aula]

Data l'applicazione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f(x,y,z) = (2x, x + y, 3x + 4y - 5z)$, determinarne una base di autovettori. Esibire il prodotto di tre matrici che diagonalizza la matrice di f nelle basi canoniche e scrivere la matrice risultante. Stabilire se esistono vettori che non hanno controimmagine secondo f.

Sol. L'equazione caratteristica è $(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 5) = 0$. I tre rispettivi autovettori possono essere scelti come $(0,3,2)$, $(1,1,1)$ e $(0,0,1)$. Il prodotto richiesto è

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

L'applicazione è biiettiva, in particolare suriettiva, quindi non esistono vettori che non abbiano controimmagine.

3. Calcolare la proiezione ortogonale di $(0,0,1,0)$ sul sottospazio $S = \langle (1,1,1,1), (3,2,2,2), (4,0,0,0) \rangle$. Scrivere (il minimo numero di) equazioni cartesiane di S.

Sol. Possiamo scegliere il primo e il terzo vettore come elementi di una base di S. Ortogonalizziamo $(1,1,1,1)$ rispetto a $(4,0,0,0)$ ottenendo $(1,1,1,1) - \frac{1}{4}(4,0,0,0) = (0,1,1,1)$. Ora possiamo calcolare la proiezione come $0(4,0,0,0) + \frac{1}{3}(0,1,1,1) = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Per trovare due equazioni cartesiane (notiamo infatti che $4 - dim(S)$ vale 2) imponiamo che sia uguale a 2 il rango di

$$\begin{pmatrix} x & y & w & z \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Avremmo potuto utilizzare $(1,1,1,1)$ e anche $(4,0,0,0)$ ma conosciamo vettori più semplici che costituiscono comunque una base di S. Orlando la sottomatrice di ordine 2 in basso a sinistra otteniamo due minori di ordine 3 e infine le equazioni $y - w = y - z = 0$ (meglio: $y = w = z = 0$).

4. Eseguendo una rotazione del riferimento, portare in forma canonica l'iperbole di equazione $23x^2 + 28xy + 2y^2 - 30 = 0$. Determinare le equazioni originali delle direttrici di questa conica.

Sol. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Rightarrow 30X^2 - 5Y^2 - 30 = 0 \Rightarrow \frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{6} = 1$. Dunque $a^2 = 1$ e $c = \sqrt{7}$; utilizzando la matrice inversa (la trasposta, in questo esercizio) per sostituire la X nelle equazioni $X = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}$, otteniamo $\frac{1}{\sqrt{5}}(2x + y) = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}$.