1. Dato un riferimento cartesiano $Oxyz$, scrivere un'equazione cartesiana del piano passante per il punto $(1,0,2)$, parallelo alla retta $r : x+y+z = x-4z-8 = 0$ e perpendicolare al piano π : $5x-7y+z-1=0$. Stabilire se il piano π forma un angolo di $30°$ con l'asse z.

Sol. Partiamo dall'equazione generale $ax+by+cz+d=0$. Il passaggio per il punto dato implica che $a+2c+d=0$; il parallelismo con $\vec{v}_r = (4,-5,1)$ porta alla condizione $4a-5b+c=0$; infine la perpendicolarità rispetto a π implica che $5a-7b+c=0$. Queste tre condizioni costituiscono un sistema lineare omogeneo in 4 incognite, con soluzione parametrica. Ad es. otteniamo l'equazione $2x+y-3z+4=0$.

2. Data l'applicazione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f(x,y,z) = (x+2y+3z, x+2y+3z, x+2y+3z)$, determinarne una base di autovettori. Esibire un vettore che non abbia controimmagine. Interpretando f come una trasformazione dello spazio $Oxyz$ in se stesso, descrivere l'immagine del cubo "unitario", i cui vertici sono gli otto punti con coordinate 0 o 1.

Sol.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 3 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2$$

con soluzioni uguali a 0 (molt. alg. 2) e 6 (molt. alg. 1). Il primo autospazio (in effetti il nucleo) è generato ad es. da $(3,0,-1)$ e $(0,3,-2)$. Il terzo autovettore è $(1,1,1)$ o un suo multiplo non nullo. Qualunque vettore che non sia un multiplo di $(1,1,1)$ soddisfa la seconda richiesta. Il cubo unitario viene trasformato nel segmento di estremi $(0,0,0)$ e $(6,6,6)$; la dimensione dell'immagine infatti collassa a 1 perché il nucleo ha dimensione 2.

3. Determinare la dimensione del sottospazio $S = \langle(1,1,1,1),(1,1,0,0),(2,2,-1,-1)\rangle$. Determinare una base ortogonale di S. Determinare un vettore ortogonale a S. Calcolare la proiezione ortogonale di $(0,0,3,0)$ su S.

Sol. I tre generatori sono linearmente dipendenti, mentre due generatori sono idonei; dunque la dimensione vale 2. possiamo scegliere i primi due e ortogonalizzare il secondo, ottenendo

$$(1,1,0,0) - \frac{2}{4}(1,1,1,1) = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1) \ ,$$

che possiamo migliorare trasformandolo in $(1,1,-1,-1)$. Questo vettore forma una base ortogonale insieme a $(1,1,1,1)$. Qualunque vettore che soddisfi il sistema $x+y+w+z = x+y = 0$ appartiene al sottospazio ortogonale $S^\perp$ – ad es. $(1,-1,0,0)$. Infine, proiettando il vettore dato otteniamo

$$\frac{3}{4}(1,1,1,1) - \frac{3}{4}(1,1,-1,-1) = \left(0,0,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) \ .$$

4. Stabilire se esistono valori reali di k che rendono insolubile il sistema

$$\begin{cases} 2x+y+kz+5=0 \\ kx+3z+k=0 \\ 5x+2y+5z+11=0 \end{cases} .$$

Sol. Il determinante della matrice incompleta vale 0 per $k \in \left\{1, \frac{3}{2}\right\}$. D'altra parte, applicando il teorema degli orlati e considerando quindi il determinante della matrice formata dalle ultime tre colonne (compresi i termini noti), accade che esso vale 0 sia per $k=1$ che per $k=\frac{3}{2}$. Ne segue che il rango della matrice completa non è mai diverso dal rango dell'incompleta: il sistema ammette soluzione per qualunque valore di k.

5. Di un'applicazione lineare $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ è noto che $g(2,1) = (5,3,-2)$ e $g(5,1) = (10,6,-4)$. Determinare una base del nucleo di g.

Sol. Le soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sono $x = 2t$, $y = -t$ con $t \in \mathbf{R}$. Tuttavia si tratta di *coordinate* rispetto alla base $\{(2,1),(5,1)\}$ del dominio; il vettore generico del nucleo di g è dunque $2t(2,1) - t(5,1) = (-t,t)$. Una base è ad es. $\{(1,-1)\}$.

6. Eseguendo una rotazione del riferimento, portare in forma canonica l'iperbole di equazione $26x^2 + 36xy - y^2 - 70 = 0$. Determinare le coordinate originali dei due vertici di questa conica.

Sol. Autovettori: $(2,1)$ per $\lambda = 35$, $(-1,2)$ per $\lambda = -10$. Una possibile rotazione è data dalle formule $x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X - Y)$, $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(X + 2Y)$. Essa conduce alla forma canonica

$$\frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{7} = 1 \ .$$

Nelle nuove coordinate i vertici sono $\left(\pm\sqrt{2}, 0\right)$. Sostituendo queste coordinate nelle formule troviamo $\pm\sqrt{\frac{2}{5}}(2,1)$.

7. Determinare una base dello spazio vettoriale delle matrici 2×3, a valori reali, aventi l'ultima colonna nulla.

Sol. Questo spazio è generato ad es. dalle 4 matrici aventi un 1 in un posto non appartenente all'ultima colonna e 0 in ogni altro posto. Tali matrici sono anche linearmente indipendenti, quindi costituiscono una base.

8. Trovare e commentare l'errore presente in questa deduzione: *"Se $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, $\underline{u}_3$ sono vettori linearmente dipendenti, allora è possibile esprimere $\underline{u}_2$ come combinazione lineare di $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_3$"*.

Non è sempre possibile generare $\underline{u}_2$; in alcuni casi è possibile generare un altro vettore dei tre presenti. Ad es. nel caso in cui $\underline{u}_1 = (0,0,0)$, $\underline{u}_2 = (1,0,0)$, $\underline{u}_3 = (1,2,3)$ è possibile ottenere $\underline{u}_1$ come combinazione lineare di $\underline{u}_2$ e $\underline{u}_3$. L'enunciato corretto è: *"Se $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, $\underline{u}_3$ sono vettori linearmente dipendenti, allora è possibile esprimere uno di essi come combinazione lineare degli altri due"*.