GEOMETRIA – Prova scritta telematica dell'11 giugno 2020, ore 14.00.

Durata totale: 2 ore e 5 minuti (escluso il caricamento delle foto). Punteggio totale: 28.5.

La prova consiste di una sequenza di 4 sessioni exam.net. Per ciascuna sessione lo studente deve selezionare e risolvere uno dei 4 esercizi **(può decidere liberamente l'ordine)**. Al termine di ogni sessione deve essere inviata la risoluzione (con giustificazioni delle risposte) mediante una o più foto da caricare nel sito exam.net.

È ammessa eccezionalmente la prosecuzione di un esercizio nelle sessioni successive, purché venga indicato con chiarezza il riferimento precedente (ad es. con un asterisco e una nota).

Scrivere NOME e COGNOME in ciascun foglio inviato.

La durata della prima sessione è di 35 minuti, al fine di consentire un'analisi globale con programmazione della sequenza di esercizi da svolgere.

....

Esercizio 1.

[3.5 punti] Tra i punti T della retta $r : 2x - 3y = y - z + 1 = 0$, determinare quello che forma un angolo retto $A\hat{T}B$ insieme ai punti $A = (1, 2, 3)$ e $B = (0, 0, 1)$.

SOL. Imponiamo che sia nullo il prodotto scalare dei vettori $\overrightarrow{AT}$ e $\overrightarrow{TB}$ dove T è il punto mobile $(3s, 2s, 2s + 1)$. Otteniamo

$$s = 0 \quad , \quad s = \frac{11}{17} \; .$$

[2.5 punti] Tra i piani contenenti la retta r, determinare quello parallelo al vettore $(8, 7, 6)$.

SOL. Imponiamo che il fascio di piani con equazione generale $\lambda(2x-3y)+\mu(y-z+1) = 0$ soddisfi

$$\lambda(2 \cdot 8 - 3 \cdot 7) + \mu(7 - 6) = 0$$

(attenzione: abbiamo eliminato il termine noto). Otteniamo ad es. $\lambda = 1$, $\mu = 5$, quindi un'equazione del piano: $2x + 2y - 5z + 5 = 0$.

[2 punti] Dimostrare che r e l'asse y sono sghembe.

SOL. I vettori direttori non sono proporzionali e non esiste intersezione.

Esercizio 2.

[3 punti] Data l'applicazione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f(x, y, z) = (x + y, x + y, 2z)$, determinarne una base di autovettori.

SOL. Abbiamo:

$$\begin{vmatrix} 1-s & 1 & 0 \\ 1 & 1-s & 0 \\ 0 & 0 & 2-s \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; s \in \{0, 2\} \; .$$

Per $s = 0$ troviamo un solo autovettore, $(1, -1, 0)$, mentre l'autospazio di $s = 2$ ha dimensione 2 e possiamo scegliere ad es. la base $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

[1.5 punti] Esibire una base dell'immagine di f.

SOL. Scegliamo due colonnne linearmente indipendenti della matrice con cui stiamo lavorando; ad es. le ultime due.

[1.5 punti] Scrivere un'equazione cartesiana dell'immagine.

SOL. Si tratta in effetti dell'autospazio di $s = 2$, con equazione $x - y = 0$. Infatti esso viene trasformato in se stesso e occupa tutta l'immagine.

[2 punti] Determinare un vettore che non abbia controimmagine.

SOL. Dobbiamo aggiungere una colonna che aumenti il rango, ad es. $(1, 0, 0)^t$.

Esercizio 3.

[3 punti] Calcolare la proiezione ortogonale di $(0,1,0,1)$ sul sottospazio $S = \langle (1,1,1,1),(1,1,1,0),(3,3,3,2)\rangle$.

SOL. S ha dimensione 2. Ortogonalizzando il primo vettore rispetto al secondo otteniamo

$$(1,1,1,1) - \frac{(1,1,1,1)\times(1,1,1,0)}{(1,1,1,0)\times(1,1,1,0)}(1,1,1,0) = (0,0,0,1)\ .$$

Ora proiettiamo:

$$\frac{(0,1,0,1)\times(1,1,1,0)}{(1,1,1,0)\times(1,1,1,0)}(1,1,1,0) + \frac{(0,1,0,1)\times(0,0,0,1)}{(0,0,0,1)\times(0,0,0,1)}(0,0,0,1) = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\right)\ .$$

[1.5 punti] Scrivere equazioni cartesiane del sottospazio ortogonale a S.

SOL. Il vettore generico di $S^{\perp}$ deve essere ortogonale a due vettori di una base di S. Abbiamo quindi ad esempio

$$(x,y,w,z)\times(1,1,1,1) = 0 \ \wedge\ (x,y,w,z)\times(1,1,1,0) = 0\ ,$$

da cui otteniamo $x+y+w+z = x+y+w = 0$.

[2 punti] Stabilire se la somma di S col sottospazio $T = \langle (1,0,0,0),(0,0,0,1)\rangle$ è una somma diretta.

SOL. La somma non è diretta perché l'intersezione contiene $(0,0,0,1)$.

Esercizio 4.

SOL.

[3 punti] Eseguire una rotazione del riferimento per portare in forma canonica l'iperbole di equazione $3x^2 - 4xy - 12 = 0$.

SOL. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\frac{X^2}{3} - \frac{Y^2}{12} = 1\ .$$

[2 punti] Determinare le coordinate originali di uno dei suoi fuochi (a piacere).

SOL.

$$\begin{pmatrix} x_F \\ y_F \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{15} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}\ .$$

[1 punto] Calcolare l'eccentricità di questa iperbole.

SOL.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} = \sqrt{5}\ .$$