GEOMETRIA – Prova scritta (presenza/remoto) del 10 giugno 2021, ore 11.10.
Durata totale: 2 ore e 30 minuti (escluso il caricamento delle foto per le prove da remoto).

Giustificare le risposte. Sono riportati i singoli punteggi.
I punteggi possono subire lievi modifiche nella fase di valutazione.

Esercizio 1.

$\boxed{\mathbf{3.5}}$ Stabilire se per qualche numero reale k il sottospazio

$$S = \langle (2,1,0,k), (3,k,1,1), (1,2-k,-1,2k-1) \rangle$$

ha dimensione 3.

$\boxed{2}$ Successivamente, porre $k = 0$ e scrivere equazioni cartesiane (il minimo numero) del relativo sottospazio.

Sol. Il terzo vettore è generato dai primi due: $2\underline{v}_1 - \underline{v}_2 = \underline{v}_3$. Ne segue che non è possibile trovare alcun k che soddisfi la richiesta.

Per $k = 0$ utilizziamo il teorema degli orlati per abbassare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} x & y & w & z \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Utilizzando i minori relativi alle colonne $1, 2, 3$ e $1, 2, 4$ otteniamo le equazioni

$$x - 2y - 3w = x - 2y - 3z = 0 .$$

Esercizio 2.

$\boxed{\mathbf{2.5}}$ Determinare a in modo che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

abbia l'autovettore $(1, 2)$.

Sol. Moltiplicando la matrice per il vettore otteniamo $(1 + 2a, 8)$; imponendo la proporzionalità otteniamo

$$1 + 2a = \frac{1 \cdot 8}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{2} .$$

Esercizio 3.

$\boxed{3}$ Data l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che

$$f(x, y, z) = (x + y, x + z, y + z) ,$$

calcolarne una base di autovettori (sugg. Un autovalore vale 1 ed è possibile applicare il metodo di Ruffini).

$\boxed{\mathbf{2.5}}$ Nel relativo sistema di coordinate $Oxyz$, dimostrare che l'immagine del quadrato di vertici $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$ è un rombo non quadrato.

$\boxed{\mathbf{1.5}}$ Stabilire se f è invertibile.

$\boxed{2}$ Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica nel dominio e alla base $\{(\sqrt{7}, 0, 0), (0, \sqrt{7}, 0), (0, 0, \sqrt{7})\}$ nel codominio.

Sol. L'equazione caratteristica è

$$\begin{vmatrix} 1-s & 1 & 0 \\ 1 & -s & 1 \\ 0 & 1 & 1-s \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s^3 - 2s^2 - s + 2 ,$$

con soluzioni uguali a 1, -1, 2. I rispettivi autovalori sono ad es. $(1,0,-1)$, $(1,-2,1)$, $(1,1,1)$.

I punti $f(1,0,0)$ e $f(0,0,1)$ vengono trasformati in $(1,1,0)$ e $(0,1,1)$; le due immagini hanno la stessa distanza dall'origine e i relativi vettori formano un angolo acuto.

La matrice ha rango 3, quindi è invertibile.

Le immagini dei vettori della base canonica devono essere scritte rispetto alla nuova base; è sufficiente dividere tutti i coefficienti della matrice iniziale per $\sqrt{7}$, ottenendo quindi

$$\frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Esercizio 4.

$\boxed{3}$ Eseguire una rotazione del riferimento per portare in forma canonica l'iperbole di equazione $x^2+4xy+y^2-6=0$.

$\boxed{2}$ Calcolare le coordinate originali dei suoi fuochi.

Sol. Autovettori: $(1,1)$ per $\lambda=3$, $(-1,1)$ per $\lambda=-1$. Sostituendo le vecchie variabili mediante la legge

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

otteniamo

$$\frac{X^2}{2}-\frac{Y^2}{6}=1 .$$

I fuochi, nelle nuove coordinate, sono $(\pm\sqrt{8},0)$. Inserendo queste coordinate nella legge del cambiamento di coordinate otteniamo

$$\begin{pmatrix} x_F \\ y_F \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pm\sqrt{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Esercizio 5.

$\boxed{2.5}$ Dato il piano $\pi : x+2y+3z+4=0$, scrivere equazioni cartesiane della retta passante per l'origine e perpendicolare a π.

$\boxed{3}$ Scrivere equazioni cartesiane della retta contenuta in π, passante per $(0,-2,0)$ e perpendicolare all'asse y.

Sol. Dalle equazioni parametriche $(x,y,z)=t(1,2,3)$ otteniamo per assorbimento della t le equazioni cartesiane $y=2x \wedge z=3x$.

La retta richiesta nasce dall'intersezione del piano dato col piano della forma $0x+1y+0z+d$ e passante per il punto dato, quindi con $d=2$. In sintesi otteniamo

$$r : x+2y+3z+4=y+2=0 .$$

Esercizio 6.

$\boxed{2.5}$ Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $(1,0,0,0)$ relativamente al sottospazio

$$\langle(3,1,3,1),(1,1,-1,-1)\rangle \subset \mathbf{R}^4 .$$

Sol. I due generatori sono già ortogonali, quindi procediamo subito con la formula della proiezione ottenendo

$$\underline{p}=\frac{3}{20}(3,1,3,1)+\frac{1}{4}(1,1,-1,-1)=\left(\frac{7}{10},\frac{2}{5},\frac{1}{5},-\frac{1}{10}\right) .$$