GEOMETRIA – Prova scritta (presenza/remoto) del 9 luglio 2021, ore 11.10.
Durata totale: 2 ore e 30 minuti (escluso il caricamento delle foto per le prove da remoto).

Giustificare le risposte. Sono riportati i singoli punti.

Somma dei punti: 30

I punteggi possono subire lievi modifiche nella fase di valutazione.

Esercizio 1.

$\boxed{\mathbf{2.5}}$ Dato un riferimento $Oxyz$, determinare $h \in \mathbf{R}$ in modo che i punti $(\sqrt{8}, 8, 4)$ e $(1, h, \sqrt{2})$ siano allineati col punto $(-\sqrt{8}, -8, -4)$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Per $h = 0$ scrivere un'equazione cartesiana del piano contenente i primi due punti e perpendicolare al piano $\pi : 3x - 8 = 0$.

$\boxed{\mathbf{2.5}}$ Calcolare il coseno dell'angolo θ formato da π con la retta descritta dal punto mobile $(t + 3, t - 6, t + 9)$.

Sol. L'origine è un ulteriore punto allineato, quindi i vettori $(\sqrt{8}, 8, 4)$ e $(1, h, \sqrt{2})$ devono essere proporzionali; ciò accade se $h = \sqrt{8}$.

Un'equazione del piano richiesto può essere ottenuta come

$$\begin{vmatrix} x - \sqrt{8} & y - 8 & z - 4 \\ \sqrt{8} - 1 & 8 & 4 - \sqrt{2} \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (4 - \sqrt{2})y - 8z + 8\sqrt{2} = 0 \quad .$$

$$\sin\theta = \frac{(1, 1, 1) \times (3, 0, 0)}{\sqrt{3} \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; \cos\theta = \sqrt{\frac{2}{3}} \; .$$

Esercizio 2.

$\boxed{\mathbf{1.5}}$ Determinare un autovettore dell'applicazione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita dalla legge $f(x, y, z) = (6x + y + z, 6y + z, 6z)$.

$\boxed{\mathbf{2.5}}$ Calcolare la controimmagine del vettore $(0, 0, p)$ al variare di $p \in \mathbf{R}$.

$\boxed{\mathbf{2.5}}$ Scrivere la matrice di f rispetto alla base $\{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ nel dominio e nel codominio.

Sol. L'unico autovalore è 6. Il relativo sistema porta all'autospazio $(t, 0, 0)$.

Il sistema $(6x + y + z, 6y + z, 6z) = (0, 0, p)$ ha la soluzione unica $\left(-\frac{5p}{216}, -\frac{p}{36}, \frac{p}{6}\right)$.

La prima e terza colonna della matrice definita rispetto alla base canonica devono essere scambiate.

Esercizio 3.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Calcolare la proiezione ortogonale di $(3, 2, 4, 1)$ rispetto al sottospazio S definito dall'equazione $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

Sol. Poiché siamo in presenza di una sola equazione, è conveniente passare per la componente ortogonale:

$$\underline{p} = (3, 2, 4, 1) - \underline{c} = (3, 2, 4, 1) - \frac{(3, 2, 4, 1) \times (1, 1, 1, 1)}{(1, 1, 1, 1) \times (1, 1, 1, 1)}(1, 1, 1, 1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) \; .$$

Esercizio 4.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Eseguire una rotazione del riferimento per portare in forma canonica l'iperbole di equazione $xy - 100 = 0$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Scrivere le equazioni originali dei suoi asintoti.

Sol. Autovettori: $(1,1)$ per $\lambda = \frac{1}{2}$, $(-1,1)$ per $\lambda = -\frac{1}{2}$. Sostituendo le vecchie variabili mediante la legge

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

otteniamo

$$\frac{X^2}{200} - \frac{Y^2}{200} = 1 \, .$$

Nel nuovo sistema di riferimento le equazioni degli asintoti sono $Y = \pm X$. Utilizzando la legge inversa

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

e rimpiazzando le variabili otteniamo le due rette di equazioni $x = 0$ e $y = 0$.

Esercizio 5.

$\boxed{\mathbf{2.5}}$ Dimostrare che le matrici triangolari superiori 3×3 costituiscono uno spazio vettoriale (con le usuali operazioni).

Sol. La somma di due matrici triangolari superiori è ancora una matrice triangolare superiore; il prodotto con uno scalare porta similmente a una matrice triangolare superiore. Abbiamo quindi un sottospazio dello spazio delle matrici di ordine 3.

Esercizio 6.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Determinare la soluzione generale, con parametri, del sistema

$$\begin{cases} x + y + w + z = 0 \\ 2x + y - w - z = 0 \\ x + 2y + 4w + 4z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} .$$

Sol. Abbiamo $4 - 2 = 2$ parametri; la soluzione è ad esempio

$$\left(t, -\frac{3}{2}t, u, \frac{t}{2} - u\right) \quad : \quad \forall\, t, u \in \mathbf{R} \, .$$

Esercizio 7.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Calcolare la matrice inversa di

$$E = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol.

$$E^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$