1. Dato un riferimento cartesiano $Oxyz$, stabilire se i punti $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 2, 1)$, $C = (2, 8, -4)$, $D = (6, 0, 0)$ sono complanari. Dimostrare che l'asse x e la retta passante per A e B sono rette sghembe. Tra i piani contenenti l'asse z determinare quelli distanti 1 da C.

Sol. Abbiamo:

$$\begin{vmatrix} 1-6 & 2-0 & 3-0 \\ 3-6 & 2-0 & 1-0 \\ 2-6 & 8-0 & -4-0 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

I punti sono dunque complanari. La retta per A e B può essere espressa in forma parametrica come $(x, y, z) = (1 + 2t, 2, 3 - 2t)$; la sua direzione non è quella dell'asse x e inoltre non esistono punti in comune a causa del 2 costante nella seconda coordinata del punto parametrico. Quindi le rette sono effettivamente sghembe. Infine, utilizzando il fascio proprio di piani contenenti l'asse z, abbiamo:

$$\frac{|\lambda \cdot 2 + \mu \cdot 8|}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} = 1 \ .$$

Ponendo $\mu = 1$ troviamo $\lambda = \frac{-16\pm\sqrt{67}}{3}$.

2. Data l'applicazione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f(x, y, z) = (x+2y+3z, 0, 2x+2y+2z)$, determinarne una base di autovettori. Scrivere la matrice di f rispetto alla base di autovettori nel dominio e alla base canonica nel codominio.

Sol.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda - 4)$$

con soluzioni uguali a 0, -1, 4. I rispettivi autovettori, a meno di un fattore, sono $(1, -2, 1)$, $(3, 0, -2)$, $(1, 0, 1)$. La matrice richiesta può essere ottenuta ponendo in colonna le immagini dei tre autovettori:

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} .$$

3. Calcolare la proiezione ortogonale di $(0, 1, 0, 0)$ sul sottospazio $S : x_1 = x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Scrivere equazioni cartesiane del sottospazio ortogonale a S.

Sol. Una base di S è $\{(0, 1, -1, 0), (0, 0, 1, -1)\}$. Ortogonalizzando il secondo vettore otteniamo $(0, 0, 1, -1) - \frac{-1}{2}(0, 1, -1, 0) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$ che possiamo moltiplicare per 2 ottenendo $(0, 1, 1, -2)$. La proiezione richiesta è

$$\frac{1}{2}(0, 1, -1, 0) + \frac{1}{6}(0, 1, 1, -2) = \left(0, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \ .$$

Utilizzando la base di S (non occorre quella ortogonalizzata) e la definizione di prodotto scalare, otteniamo facilmente le equazioni di $S^\perp$, $x_2 - x_3 = x_3 - x_4 = 0$.

4. Determinare gli eventuali valori di k – parametro reale – che rendono insolubile il sistema

$$\begin{cases} 2x + y + kz + k = 0 \\ 3x + 5y + z - 2 = 0 \\ kx + 6y + 6z + 3 = 0 \end{cases} .$$

Sol. Abbiamo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & k \\ 3 & 5 & 1 \\ k & 6 & 6 \end{vmatrix} = -5k^2 + 19k + 30 \ .$$

Dunque il rango della matrice incompleta scende a 2 per $k = 5$ e $k = -\frac{6}{5}$. Per gli altri valori di k la matrice incompleta ha lo stesso rango, 3, della completa, quindi esiste (un'unica) soluzione. Esaminiamo ora i due casi particolari. Grazie al teorema degli orlati è sufficiente calcolare il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & k & k \\ 5 & 1 & -2 \\ 6 & 6 & 3 \end{vmatrix} ,$$

dato che $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}$ non è nullo. Tale determinante è uguale a $15-3k$, quindi svanisce solo per $k=5$. Ne deduciamo che soltanto $k=-\frac{6}{5}$ provoca la disuguaglianza dei ranghi: esso è l'unico valore richiesto.

5. Di un'applicazione lineare $g: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ è noto che $(2,3)$ è un autovettore con autovalore uguale a 8; inoltre è noto che $(1,1) \in Ker(g)$. Calcolare $g(3,4)$.

Sol. Abbiamo: $g(3,4) = g((1,1)+(2,3)) = g(1,1)+g(2,3) = (0,0)+8(2,3) = (16,24)$.

6. Eseguendo una rotazione del riferimento, portare in forma canonica la parabola di equazione $x^2 - 2xy + y^2 - \sqrt{2}x = 0$. Determinare le coordinate originali del fuoco di questa conica.

Sol. Autovettori: $(1,-1)$ per $\lambda = 2$, $(1,1)$ per $\lambda = 0$. Una possibile rotazione è data dalle formule $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-X+Y)$. Essa conduce alla forma canonica $Y = 2X^2 - X$. Nelle nuove coordinate il fuoco è $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$. Sostituendo queste coordinate nelle formule troviamo $\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}, -\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)$.

7. Dato l'insieme $\mathcal{H} = \{(a+b+c+d, a-b-c, a-b-c) \colon a,b,c,d \in \mathbf{R}\}$, dimostrare che esso è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$ e calcolare la sua dimensione. Infine determinare un vettore che non appartenga a $\mathcal{H}$.

Sol. $\mathcal{H}$ è l'insieme generato ad es. dai vettori ottenuti sostituendo 1 in un parametro e 0 negli altri: $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(1,-1,-1)$, $(1,0,0)$. Infatti

$$(a+b+c+d, a-b-c, a-b-c) = a(1,1,1) + b(1,-1,-1) + c(1,-1,-1) + d(1,0,0) \ .$$

Dunque $\mathcal{H}$ è un sottospazio, per un noto teorema. Tuttavia un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti è dato da due soli vettori, ad es. i primi due. Ne segue che la dimensione vale 2. Qualunque vettore che abbia la seconda e terza componente diverse non appartiene al sottospazio dato.