

# GEOMETRIA – Prova scritta dell'11 settembre 2020, ore 15.00.

Nome: ..... Cognome: .....

Matricola: ..... Firma: .....

Giustificare le risposte; consegnare soltanto la bella copia.

## Esercizio 1.

Determinare gli eventuali valori di  $k$  che rendono linearmente dipendenti i vettori

$$(k, k, 1, 2), (0, 1, 0, 1), (2, 3, 2k, 5).$$

Ponendo  $k = 0$ , determinare un vettore che non appartenga al sottospazio generato da tali vettori.

Calcolare la proiezione ortogonale del terzo vettore nel sottospazio generato dai primi due (sempre per  $k = 0$ ).

**SOL.** Mediante il teorema degli orlati applicato alla matrice che ha come righe i vettori dati, considerando il minore di ordine 2 in alto a destra, otteniamo le condizioni  $2k^2 - 2 = 0$  e  $2k^2 - 4k + 2 = 0$ . L'unica soluzione in comune è  $k = 1$ .

Per la seconda richiesta è idoneo qualunque vettore che alzi a 4 il rango della relativa matrice. Ad es.  $(0, 0, 0, 1)$  dà

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Ortogonalizzando il primo vettore rispetto al secondo otteniamo

$$(0, 0, 1, 2) - \frac{2}{2}(0, 1, 0, 1) = (0, -1, 1, 1).$$

Ora calcoliamo la proiezione:

$$\frac{2}{3}(0, -1, 1, 1) + \frac{8}{2}(0, 1, 0, 1) = \left(0, \frac{10}{3}, \frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right).$$

## Esercizio 2.

Calcolare una base del nucleo relativo all'applicazione  $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$  definita da  $f(x, y, w, z) = (x + y + w + z, x + y, w + z)$ .

Verificare che la somma delle dimensioni del nucleo e dell'immagine vale 4.

**SOL.** Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x + y + w + z = 0 \\ x + y = 0 \\ w + z = 0 \end{cases}.$$

Il rango della matrice incompleta vale 2; otteniamo  $\infty^{4-2}$  soluzioni, ad es. del tipo  $(s, -s, t, -t)$ . Come base possiamo dunque scegliere  $\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}$ .

In coordinate canoniche, l'immagine è generata dalle colonne della relativa matrice. Esse sono  $(1, 1, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 1)$ . Una base consiste quindi di due vettori e la verifica è conclusa.

## Esercizio 3.

Stabilire se  $(3, 2, 1)$  è un autovettore per l'applicazione lineare  $g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  definita da

$$g(1, 0, 0) = (2, 2, 2), g(0, 1, 0) = (1, 1, 3), g(0, 0, 1) = (1, -2, -9).$$

**SOL.** Utilizzando la linearità di  $g$  otteniamo

$$g(3, 2, 1) = 3(2, 2, 2) + 2(1, 1, 3) + 1(1, -2, -9) = (9, 6, 3) ,$$

quindi siamo in presenza di un autovettore con relativo autovalore uguale a 3.

**Esercizio 4.**

Determinare equazioni parametriche della retta passante per l'origine e perpendicolare al piano  $\pi$  di equazione  $4x + y - z + 11 = 0$ .

Tra i punti di tale retta, determinare quelli distanti 10 dal piano di equazione  $x + y - 4z + 1 = 0$ . Calcolare il coseno dell'angolo acuto  $\theta$  formato dal piano  $\pi$  col piano  $xy$ .

**SOL.**  $x = 4t, y = t, z = -t$ .

Utilizzando la formula della distanza otteniamo

$$\frac{|4t + t - 4t + 1|}{\sqrt{3}} = 10 \Rightarrow t = -1 \pm 10\sqrt{3} .$$

Sostituendo i due valori otteniamo i punti richiesti.

$$\cos \theta = \frac{|(0, 0, 1) \times (4, 1, -1)|}{\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{18}} .$$

**Esercizio 5.**

Eseguire una rotazione del riferimento per portare in forma canonica l'ellisse di equazione  $4x^2 + 2\sqrt{2}xy + 5y^2 - 12 = 0$ . (facilitazione: al termine dei relativi calcoli, gli autovettori risultano uguali ad es. a  $(\sqrt{2}, -1)$  e  $(1, \sqrt{2})$  - da normalizzare.)

Calcolare le coordinate originali dei due fuochi.

Calcolare l'eccentricità di tale conica.

**SOL.**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Rightarrow \\ 3X^2 + 6Y^2 - 12 &= 0 \Rightarrow \frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{2} = 1 . \end{aligned}$$

Sostituendo le coordinate nuove dei fuochi nella legge del cambiamento di coordinate, otteniamo

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \mp\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

Infine

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$