PARTE 2. *Giustificare le risposte; consegnare soltanto la bella copia.*

[**1**] Tra i piani contenenti la retta $r : x - 3 = x + y - z - 2 = 0$ determinare quello parallelo al piano $\pi : 4x + y - z = 0$. Calcolare il coseno dell'angolo acuto formato da π con l'asse z. Scrivere equazioni cartesiane della retta che giace in π ed è perpendicolare all'asse z.

Sol. Regoliamo d in modo che $\pi' : 4x + y - z - d = 0$ passi per un punto di r. Otteniamo $d = 11$. Il seno dell'angolo richiesto è uguale a $\left|\frac{(0,0,1)\times(4,1,-1)}{1\cdot\sqrt{18}}\right| = \frac{1}{\sqrt{18}}$, quindi il coseno vale $\sqrt{\frac{17}{18}}$. Infine, basta associare all'equazione di π quella del piano di equazione $z = 0$.

[**2**] Mediante un'opportuna rotazione del riferimento, portare in forma canonica la parabola di equazione $x^2 + 8xy + 16y^2 - 2\sqrt{17}y = 0$. Scrivere un'equazione cartesiana della direttrice (nel riferimento iniziale).

Sol. Autovettori: $(1, 4)$ per $\lambda = 17$, $(-4, 1)$ per $\lambda = 0$. Sostituendo le vecchie variabili mediante la legge $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ otteniamo $17X^2 + 0Y^2 - 2\sqrt{17}\frac{1}{\sqrt{17}}(4X + Y) = 0$, dunque $Y = \frac{17}{2}X^2 - 4X$. L'equazione originale della direttrice è (utilizzando la legge inversa) $\frac{1}{\sqrt{17}}(-4x + y) = \frac{-1-\Delta}{4a}$ ...

[**3**] Scrivere equazioni cartesiane del sottospazio $S = \langle(1, 3, 0, 0), (1, 1, 1, 1)\rangle \subset \mathbf{R}^4$. Esibire due vettori non proporzionali e non appartenenti a S. Calcolare la proiezione ortogonale di $(1, 0, 0, 0)$ su S.

Sol. Imponendo che il generico vettore (x, y, w, z) sia generato dai due vettori dati, utilizzando un'opportuna matrice e il teorema degli orlati otteniamo ad es. $3x - y - 2w = 3x - y - 2z = 0$. Due vettori che non soddisfino tali equazioni sono idonei (purché non siano proporzionali). Infine, la proiezione vale $\frac{1}{4}(1, 1, 1, 1)$.

[**4**] Determinare una base di autovettori per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(x, y, z) = (2x + y + 3z, 2y + z, 4y + 2z)$. Scrivere la matrice di f rispetto a tale base (sia nel dominio che nel codominio). Successivamente determinare due vettori che abbiano la stessa immagine secondo f.

Sol. $\lambda = 0 : (5, 2, -4); \lambda = 2 : (1, 0, 0); \lambda = 4 : (7, 2, 4)$. La matrice richiesta è la matrice diagonale con i tre autovalori sulla diagonale principale. Due vettori del nucleo hanno la stessa immagine, ma più in generale hanno questa proprietà due vettori la cui differenza è un vettore del nucleo – grazie alla linearità di f.