Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... Firma: ....

PARTE 1. *Quesiti (rispondere soltanto su questo foglio)*

NOTA: -1 per ogni risposta errata; $+1$ e $+1.5$ risp. per quesiti "Vero/Falso" e quesiti numerici.

⊙ In $\mathbf{R}^5$ l'intersezione di due sottospazi di dimensione 3 può avere dimensione 2. [V]

⊙ Non esiste alcun piano parallelo a due rette sghembe. [F]

⊙ La somma di due autovettori può dare il vettore nullo. [V]

⊙ Un sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite può avere soluzione parametrica. [V]

⊙ Determinare a in modo che il vettore $(2, 3, a)$ sia parallelo alla retta di equazioni $3x - 2y = y + z - 2 = 0$. $[-3]$

⊙ Calcolare il numero nel posto $(1, 1)$ della matrice risultante dal seguente prodotto:
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$. $[\frac{7}{10}]$

⊙ Calcolare l'eccentricità della curva di equazione $x + 2y + 3x^2 = 2$. [1]

⊙ Calcolare la dimensione del nucleo di $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^2$ definita da $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1, 0)$. [4]

....

⊙ In $\mathbf{R}^5$ l'intersezione di due sottospazi di dimensione 4 può avere dimensione 2. [F]

⊙ Non esiste alcun piano perpendicolare a due rette sghembe. [V]

⊙ La metà di un autovettore è un autovettore. [V]

⊙ Un sistema lineare di 3 equazioni in 2 incognite può avere soluzione parametrica. [V]

⊙ Determinare a in modo che il vettore $(2, 3, a)$ sia parallelo alla retta di equazioni $3x - 2y = y - z - 2 = 0$. [3]

⊙ Calcolare il numero nel posto $(1, 2)$ della matrice risultante dal seguente prodotto:
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$. $[-\frac{1}{10}]$

⊙ Calcolare l'eccentricità della curva di equazione $2x - 5y + x^2 = 2$. [1]

⊙ Calcolare la dimensione del nucleo di $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ definita da $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, 0)$. [3]

....

⊙ In $\mathbf{R}^6$ l'intersezione di due sottospazi di dimensione 4 può avere dimensione 2. [V]

⊙ Esistono infiniti piani paralleli a due rette sghembe. [V]

⊙ Un autovalore non può essere nullo. [F]

⊙ Un sistema lineare di 3 equazioni in 4 incognite può avere soluzione unica. [F]

⊙ Determinare a in modo che il vettore $(1, 3, a)$ sia parallelo alla retta di equazioni $3x - y = y - 5z - 2 = 0$. $[\frac{3}{5}]$

⊙ Calcolare il numero nel posto $(2, 1)$ della matrice risultante dal seguente prodotto:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$. $[\frac{7}{10}]$

$\odot$ Calcolare l'eccentricità della curva di equazione $4x^2 + 4y^2 = 5$. [0]

$\odot$ Calcolare la dimensione del nucleo di $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^2$ definita da $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_4, x_5)$. [3]

....

$\odot$ In $\mathbf{R}^5$ la somma di due sottospazi di dimensione 4 può avere dimensione 5. [V]

$\odot$ Esiste solo una retta incidente e perpendicolare a due rette sghembe. [V]

$\odot$ Il prodotto scalare di due autovettori può essere nullo. [V]

$\odot$ Un sistema lineare di 4 equazioni in 2 incognite può avere soluzione unica. [V]

$\odot$ Determinare a in modo che il vettore $(1, 3, a)$ sia parallelo alla retta di equazioni $3x - y = 4y - 5z - 2 = 0$. $[\frac{12}{5}]$

$\odot$ Calcolare il numero nel posto $(2, 2)$ della matrice risultante dal seguente prodotto:
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$. $[-\frac{1}{10}]$

$\odot$ Calcolare l'eccentricità della curva di equazione $4x^2 + y^2 = 5$. $[\frac{\sqrt{3}}{2}]$

$\odot$ Calcolare la dimensione del nucleo di $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 0)$. [5]

PARTE 2. *Giustificare le risposte; consegnare soltanto la bella copia.*

[**1**] Sono dati i punti $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 0, 1)$, $C = (1, 1, 1)$. Determinare un'equazione cartesiana del piano π che li contiene. Scrivere equazioni cartesiane della retta passante per C e perpendicolare al piano π. Tra i vettori della forma $(1, 2, h)$ determinare quelli che formano con $\overrightarrow{AC}$ un angolo il cui coseno è $\pm\frac{5}{\sqrt{28}}$.

Sol. $x - y + z - 1 = 0$; $x + y - 2 = y + z - 2 = 0$; $h \in \{\frac{23}{11}, 3\}$.

[**2**] Mediante un'opportuna rotazione del riferimento, ridurre a forma canonica l'iperbole di equazione $4xy + 3y^2 - 1 = 0$. Scrivere equazioni cartesiane degli asintoti (nel riferimento iniziale).

Sol. Autovettori: $(1, 2)$ per $\lambda = 4$, $(-2, 1)$ per $\lambda = -1$. Forma canonica: $\frac{X^2}{\frac{1}{4}} - \frac{Y^2}{1} = 1$. Nel nuovo riferimento le equazioni degli asintoti sono $Y = \pm 2X$, quindi nel riferimento originale sono $(-2x + y) = \pm 2(x + 2y)$ ecc.

[**3**] Sono dati i vettori $\underline{a} = (1, 0, 1, 0)$, $\underline{b} = (0, 0, 0, 1)$, $\underline{c} = (1, 1, 1, 1)$, $\underline{d} = (0, 1, 0, 2)$. Calcolare la dimensione del sottospazio, S, che essi generano. Determinare una base ortogonale di S.

Sol. Al più 3 vettori sono lin. indipendenti, quindi la dimensione vale 3. Fissati $\underline{a}$ e $\underline{b}$ già ortogonali, resta da adeguare $\underline{c}$ mediante il procedimento di Gram-Schmidt, ottenendo il terzo vettore della base ortogonale: $(0, 1, 0, 0)$.

[**4**] Determinare una base di autovettori per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(1,0,0) = (3,3,3)$, $f(0,1,0) = (2,2,2)$, $f(0,0,1) = (0,0,0)$. Stabilire se f ha l'immagine uguale al codominio.

Sol. Per $\lambda = 0$ $(2,-3,0)$ e $(0,0,1)$, per $\lambda = 5$ $(1,1,1)$; no, f non è suriettiva.

[**5**] Discutere il sistema $\begin{cases} x + 2y + z = k \\ x + 2y + kz = 0 \end{cases}$ al variare del parametro reale k.

Sol. Non esiste soluzione per $k = 1$; per gli altri valori di k otteniamo soluzioni con un parametro.