Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... **FIRMA**: ....

GIUSTIFICARE le risposte, mediante procedimenti e calcoli chiari.

Consegnare soltanto la bella copia; utilizzare al massimo due fogli protocollo.

Lasciare uno spazio all'inizio, con nome e cognome.

INSERIRE il presente foglietto; non occorre poi piegare il foglio di bella copia.

1. Determinare ℓ, numero reale, in modo che i punti $A=(1,-2,3)$, $B=(2,-4,1)$ e $C=(4,\ell,-3)$ siano allineati. Scrivere equazioni cartesiane della retta descritta da C al variare di ℓ. Tra i piani contenenti A e B, determinare quello perpendicolare al piano xy.

Sol. Imponendo la proporzionalità dei vettori $(1,-2,-2)$ e $(3,\ell+2,-6)$ troviamo $\ell=-8$. Equazioni: $x-4=z+3=0$. Per il piano di equazione $ax+by+cz+d=0$ dobbiamo avere $c=0$, $a-2b+3c+d=0$ e $2a-4b+c+d=0$, da cui otteniamo ad es. $2x+y=0$.

2. Sia f l'applicazione lineare da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$ tale che $f(x,y,z)=(x+y+z,x+y+z,0)$. Stabilire se esistono coppie di punti che hanno la stessa immagine secondo f. Calcolare una base di autovettori di f.

Sol. Tali coppie esistono, non essendo f iniettiva. Autovalori: 0, 2 con rispettivi autovettori $\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ e $(1,1,0)$.

3. Utilizzando una rotazione del riferimento Oxy, portare in forma canonica la parabola di equazione $x^2+2xy+y^2-2\sqrt{2}y=0$. Calcolare le coordinate del fuoco, nel riferimento iniziale.

Sol.: Autovettori: $(1,1)$ per $\lambda=2$, $(-1,1)$ per $\lambda=0$. Sostituendo le vecchie variabili mediante la legge $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ otteniamo

$$2X^2+0Y^2-2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad Y=X^2-X\ .$$

Le coordinate originali del fuoco sono uguali a $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

4. Determinare gli eventuali valori di k che rendono risolubile il sistema $\begin{cases} x-y+z=k \\ 2x-y+3z=k \\ 3x-2y+4z=k \end{cases}$.

Sol. I ranghi coincidono solo per $k=0$.

5. Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $(1,2,2,1)$ rispetto al sottospazio $S=\langle(1,1,1,1),(1,1,1,2),(0,0,0,1),(1,1,1,3)\rangle$. Scrivere equazioni cartesiane di S (il minimo numero). Giustificare il fatto che la dimensione del sottospazio ortogonale $S^\perp$ vale 2.

Sol. $dim(S)=2$; occorre ortogonalizzare una base qualsiasi che consiste di due vettori. Proiezione: $\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3},1\right)$. Equazioni: $x_1-x_2=x_2-x_3=0$ (due equazioni). Per la formula di Grassmann, $dim(S^\perp)=4+0-2$.

6. Scrivere la matrice del cambiamento di coordinate dalla base canonica di $\mathbf{R}^2$ alla base $\{(2,3),(3,4)\}$.

Sol. $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

7. Calcolare la matrice di ordine 2 ottenuta come prodotto del vettore-colonna $(1,3)^t$ e del vettore-riga $(2,4)$.

Sol. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$.