Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... Firma: ....

GIUSTIFICARE le risposte mediante procedimenti e calcoli chiari.

Consegnare soltanto la bella copia; utilizzare al massimo due fogli protocollo.
Lasciare uno spazio all'inizio, con nome e cognome.
INSERIRE il presente foglietto; non occorre poi piegare il foglio di bella copia.

1. Determinare una base di autovettori per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(1,0,0) = (1,1,1)$, $f(0,1,0) = (1,1,1)$, $f(0,0,1) = (0,0,0)$.

Sol. Per $\lambda = 0$ abbiamo l'autospazio la cui forma parametrica è $(s,-s,t)$. per $\lambda = 2$ abbiamo ad es. $(1,1,1)$.

2. Determinare una base del nucleo dell'applicazione lineare $g : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ definita da $g(1,0,0,0) = g(0,1,0,0) = g(0,0,1,0) = (1,4)$ e $g(0,0,0,1) = (1,5)$. Stabilire se vettori distinti del dominio hanno in ogni caso immagini distinte. Scrivere la matrice di g rispetto alla base canonica del dominio e alla base $\{(2,1),(1,2)\}$ del codominio.

Sol. $\{(1,-1,0,0),(1,0,-1,0)\}$. No ($g$ non è iniettiva). $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & -1 \\ 7 & 7 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

3. Scrivere le leggi di un cambiamento di coordinate che trasformi l'equazione (parabola) $x^2 - 4xy + 4y^2 - \sqrt{5}x = 0$, in una forma canonica. Determinare le coordinate originali del fuoco.

Sol. Dopo un'idonea rotazione: $Y = \frac{5}{2}X^2 - \frac{1}{2}X$. Fuoco: $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{3}{40} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{8\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.
Direttrice: $\frac{1}{\sqrt{5}}(2x+y) = -\frac{1}{8}$.

4. Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $(1,2,3)$ sul sottospazio $S = \langle(1,1,1),(2,2,3),(0,0,1)\rangle$. Scrivere (il minimo numero di) equazioni cartesiane di S. Stabilire se $(1,-1,0) \in S^\perp$ (sottospazio ortogonale).

Sol. $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},3\right)$. $x = y$. Sì (il prodotto scalare con ciascun vettore di una base è nullo).

5. Tra i piani contenenti la retta di equazioni parametriche $(x,y,z) = (1+t, 1-t, 2+t)$ determinare quello perpendicolare al segmento AB, con $A = (1,2,0)$ e $B = (2,6,3)$, scrivendone un'equazione cartesiana. Calcolare il coseno dell'angolo $C\hat{A}B$, con $C = (0,2,2)$.

Sol. $x + 4y + 3z - 11 = 0$. $-\sqrt{\frac{5}{26}}$.

6. Discutere la risolubilità e il tipo di infinità delle eventuali soluzioni, al variare di $k \in \mathbf{R}$, per il sistema

$$\begin{cases} 2x + y + kz = 3 \\ kx + 7y = 1 \\ 5x + 8y + 3z = 4 \end{cases}.$$

Sol. Esiste un'unica soluzione per $k \notin \{\frac{7}{4}, 3\}$, esistono ∞^1 soluzioni per $k = 3$, infine non esiste soluzione per $k = \frac{7}{4}$.

7. Dimostrare che l'intersezione di due sottospazi è un sottospazio.

Sol. Siano $\underline{a}, \underline{a}' \in S \cap T$; poiché $r\underline{a} + r'\underline{a}' \in S$ e $r\underline{a} + r'\underline{a}' \in T$, abbiamo che $r\underline{a} + r'\underline{a}' \in S \cap T$.