Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... Firma: ....

GIUSTIFICARE le risposte mediante procedimenti e calcoli chiari.

Consegnare soltanto la bella copia; utilizzare al massimo due fogli protocollo.
Lasciare uno spazio all'inizio, con nome e cognome.
INSERIRE il presente foglietto; non occorre poi piegare il foglio di bella copia.

1. Determinare una base del nucleo dell'applicazione lineare $g : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ definita da $g(1,0,0,0) = g(0,1,0,0) = g(0,0,1,0) = (1,5)$ e $g(0,0,0,1) = (1,4)$. Stabilire se qualunque vettore del codominio ammette una controimmagine. Scrivere la matrice di g rispetto alla base canonica del dominio e alla base $\{(3,1),(1,3)\}$ del codominio.

Sol. $\langle (1,-1,0,0),(1,0,-1,0)\rangle$. Sì ($g$ è suriettiva). $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

2. Scrivere le leggi di un cambiamento di coordinate che trasformi l'equazione (parabola) $4x^2 - 4xy + y^2 - \sqrt{5}y = 0$, in una forma canonica. Determinare le coordinate originali del vertice.

Sol. Dopo un'idonea rotazione: $Y = \frac{5}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$. Vertice: $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{40} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{10\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

3. Determinare una base di autovettori per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(1,0,0) = (0,0,0)$, $f(0,1,0) = (2,2,2)$, $f(0,0,1) = (2,2,2)$.

Sol. Per $\lambda = 0$ abbiamo l'autospazio la cui forma parametrica è $(t,s,-s)$. per $\lambda = 4$ abbiamo ad es. $(1,1,1)$.

4. Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $(3,2,1)$ sul sottospazio $S = \langle (1,1,1),(3,2,2),(1,0,0)\rangle$. Scrivere (il minimo numero di) equazioni cartesiane di S. Stabilire se $(0,-1,2) \in S^{\perp}$ (sottospazio ortogonale).

Sol. $\left(3, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$. $y = z$. No (il prodotto scalare con un vettore della base non è nullo).

5. Discutere la risolubilità e il tipo di infinità delle eventuali soluzioni, al variare di $k \in \mathbf{R}$, per il sistema

$$\begin{cases} 2x + y + kz = 1 \\ kx + 7y = 3 \\ 5x + 8y + 3z = 4 \end{cases} .$$

Sol. Esiste un'unica soluzione per $k \notin \{\frac{7}{4}, 3\}$, esistono ∞^1 soluzioni per $k = 3$, infine non esiste soluzione per $k = \frac{7}{4}$.

6. Tra i piani contenenti la retta di equazioni parametriche $(x,y,z) = (2+t, 1-t, 1+t)$ determinare quello perpendicolare al segmento AB, con $A = (0,2,1)$ e $B = (3,6,2)$, scrivendone un'equazione cartesiana. Calcolare il coseno dell'angolo $C\hat{A}B$, con $C = (2,2,0)$.

Sol. $3x + 4y + z - 11 = 0$. $-\sqrt{\frac{5}{26}}$.

7. Dimostrare che l'unione di due sottospazi non è sempre un sottospazio.

Sol. Ad es. l'unione di due rette passanti per l'origine non è un insieme chiuso rispetto alla somma (considerando i punti come vettori).