Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... Firma: ....

GIUSTIFICARE le risposte mediante procedimenti e calcoli chiari.

Consegnare soltanto la bella copia; utilizzare al massimo due fogli protocollo.
Lasciare uno spazio all'inizio, con nome e cognome.
INSERIRE il presente foglietto; non occorre poi piegare il foglio di bella copia.

1. Calcolare tutte le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - 3w + z = 0 \\ x + 2y - 5z = 3 \\ 3x + 3y - 3w - 4z = 3 \\ x + 5y + 3w - 16z = 9 \end{cases} .$$

Sol. $x = 2s - \frac{7}{3}t - 1$, $y = -s + \frac{11}{3}t + 2$, $w = s$, $z = t$.

2. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} ,$$

stabilire se esiste una matrice T tale che AT sia la matrice identità. Interpretando A come la matrice di un'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ rispetto alla base canonica (sia nel dominio che nel codominio), calcolare una base di autovettori di f. Determinare un vettore del codominio che non abbia controimmagine secondo f.

Sol. Non è possibile trovare l'inversa T perché $|A| = 0$. Autovalori: $0, 4, 7$ con rispettivi autovettori $(1, 0, -2)$, $(1, 0, 2)$, $(1, 3, 2)$. Un vettore-colonna che aumenti il rango di A è ad es. $(1, 0, 0)$.

3. Data l'applicazione lineare $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che $g(1, 1) = (2, 1)$ e $g(3, 1) = (0, 0)$, stabilire se g è iniettiva. Calcolare tutti i vettori appartenenti alla controimmagine $g^{-1}(6, 3)$.

Sol. Oltre al banale $(0, 0)$ viene portato in $(0, 0)$ il vettore $(3, 1)$, quindi g non è iniettiva. Risolvendo l'equazione vettoriale $p(2, 1) + q(0, 0) = (6, 3)$ otteniamo $p = 3$ e q resta arbitraria. La soluzione è dunque $3(1, 1) + q(3, 1) = (3 + 3q, 3 + q)$ $\forall q \in \mathbf{R}$.

4. Nello spazio euclideo $Oxyz$ sono dati i punti $P = (3, 2, 1)$, $Q = (1, 2, 3)$, $R = (1, 1, 1)$. Scrivere equazioni cartesiane della retta s passante per P e Q. Calcolare la distanza di s da R. Determinare p in modo che il piano di equazione $px + y + z = 8$ formi un angolo di $30°$ con la retta s.

Sol.

$$rank \begin{pmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 1 \ \Leftrightarrow \ x + z - 4 = y - 2 = 0 .$$

Il piano ortogonale a $\overrightarrow{PQ}$ e passante per R è descritto dall'equazione $-x + z = 0$. Il sistema con s dà il punto $(2, 2, 2)$. La distanza tra questo punto e R vale $\sqrt{3}$. Infine l'equazione

$$\frac{|(-1, 0, 1) \times (p, 1, 1)|}{\sqrt{2}\sqrt{p^2 + 2}} = \sin(30°)$$

ha come soluzioni $p = 0$, $p = 4$.

5. Scrivere equazioni cartesiane del sottospazio W di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(1,2,1,2)$ e $(3,0,0,1)$. Calcolare la proiezione ortogonale di $(1,0,2,0)$ su W. Determinare un vettore appartenente al sottospazio ortogonale $W^{\perp}$.

Sol.

$$rank \begin{pmatrix} x & y & w & z \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \ \Leftrightarrow \ y - 2w = 2x + 5y - 6z = 0 \ .$$

Base ortogonale: $\{(3,0,0,1),(-1,4,2,3)\}$. Il calcolo della proiezione mediante i coefficienti di Fourier dà il vettore

$$\frac{3}{10}(3,0,0,1) + \frac{1}{10}(-1,4,2,3) = \left(\frac{4}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right) \ .$$

La componente ortogonale $(1,0,2,0) - \left(\frac{4}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right)$, cioè $\left(\frac{1}{5},-\frac{2}{5},\frac{9}{5},-\frac{3}{5}\right)$, fornisce un esempio di vettore ortogonale. Infatti esso è ortogonale ai due vettori della base di W, quindi (dimostrare...) è ortogonale all'intero sottospazio W.

6. Data l'iperbole di equazione $4xy - 7 = 0$, esibire una rotazione del riferimento che trasformi l'equazione in una forma canonica. Determinare i fuochi dell'iperbole nel nuovo riferimento.

Sol. Autovettori: $(1,1)$ per $\lambda = 2$, $(-1,1)$ per $\lambda = -2$. Una possibile rotazione è data dalle formule $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y)$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y)$. Essa conduce alla forma canonica

$$\frac{X^2}{\frac{7}{2}} - \frac{Y^2}{\frac{7}{2}} = 1 \ .$$

Nelle nuove coordinate i fuochi sono $(\pm\sqrt{7},0)$.

7. Descrivere i casi in cui il prodotto vettoriale di due versori ha lunghezza uguale a 0.5 .

Sol. Poiché la lunghezza di un tale prodotto vettoriale coincide col seno dell'angolo formato dai due versori, quest'ultimo deve valere $30°$ oppure $150°$.