Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... Firma: ....

GIUSTIFICARE le risposte, mediante procedimenti e calcoli chiari.

Consegnare soltanto la bella copia; utilizzare al massimo due fogli protocollo.

Punteggio totale: **31.5**

1. [3 punti] Stabilire se esistono valori di k che rendono linearmente dipendenti i vettori $(k,1,2,2)$, $(1,k,0,k)$, $(4,4,2,1)$.

[2.5 punti] Successivamente, porre $k=1$ e scrivere equazioni cartesiane del sottospazio generato dai primi due vettori.

Sol. Non esistono valori con tale proprietà. Infatti non esistono radici comuni per due minori orlati, fissando ad es. la sottomatrice di ordine 2 con riga 1, 3 e colonna 3, 4. Equazioni: $2x+w-2z = 2y+w-2z = 0$.

2. [3 punti] Data l'applicazione $f:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f(x,y,z) = (x+2y, 2x+4y, 5z)$, determinarne una base di autovettori.

[1.5 punti] Esibire il prodotto di tre matrici che diagonalizza la matrice di f nelle basi canoniche (senza calcolare la matrice inversa, né il prodotto) e scrivere la matrice risultante.

[2 punti] Esibire un vettore che non abbia controimmagine secondo f.

[2 punti] Scrivere infine la matrice di f rispetto alla base $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ del dominio e alla base canonica del codominio.

Sol. $\lambda = 0 : (2,-1,0)$; $\lambda = 5$: autospazio $\{(t,2t,s)\}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Un vettore che non ha controimmagine è tale da aumentare il rango della matrice di f, se aggiunto in colonna. L'ultima matrice richiesta ha per colonne le immagini dei tre vettori della base data, secondo le equazioni iniziali (non occorre infatti cambiare le coordinate nel codominio).

3. [3 punti] Scrivere un'equazione cartesiana del piano contenente la retta r di equazioni $2x-y-z = x+y+z-3 = 0$ e parallelo al segmento congiungente i punti $A=(1,2,3)$ e $B=(3,2,1)$.

[3 punti] Determinare quel punto di r che forma con A e B un triangolo rettangolo, con angolo retto in A.

Sol. $x+y+z-3=0$. Il punto (x,y,z) richiesto deve soddisfare la condizione

$$(x-1, y-2, z-3) \times (2,0,-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x-z+2 = 0 \ .$$

Aggiungendo alle prime due equazioni quest'ultima equazione otteniamo il punto $(1,-1,3)$

4. [3 punti] Calcolare la proiezione ortogonale di $(1,0,0,0)$ rispetto al sottospazio $H = \langle (1,4,3,2),(4,1,2,3),(1,1,1,1),(2,5,4,3)\rangle$.

[1.5 punti] Verificare che la relativa componente ortogonale è perpendicolare al sottospazio.

Sol. $\underline{p} = \left(\frac{7}{10}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{2}{5}\right)$. La componente ortogonale è $\underline{c} = (1,0,0,0) - \underline{p}$; si verifica poi che il prodotto scalare di $\underline{c}$ con i primi due vettori (ne bastano due perché $dim(H)=2$) è nullo.

5. [3 punti] Eseguendo una rotazione del riferimento, portare in forma canonica l'iperbole di equazione $46x^2 - 60xy - 17y^2 - 29 = 0$.

[2 punti] Determinare l'equazione originale di una sua direttrice (scelta a piacere).

Sol. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{X^2}{\frac{1}{2}} - \frac{Y^2}{1} = 1$. Nelle nuove coordinate, le equazioni delle direttrici sono $X = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$. Ora, utilizzando le formule inverse è possibile sostituire X con $\frac{1}{\sqrt{29}}(5x-2y)$.

6. [2 punti] Scrivere le coordinate del vettore $(2,3)$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(-2,-3),(1,2)\}$.
Sol. Le coordinate sono rispettivamente -1 e 0, infatti

$$-1(-2,-3) + 0(1,2) = (2,3) \ .$$