Esercizi settimanali

svolti nella terza ora di lezione di ogni lunedì

Corso di laurea in

Tecniche per l'edilizia e il territorio
per la professione del geometra

Andrea Vietri

Lunedì 30 settembre 2019

• Tra i punti della forma $(2t-3, t+1)$ determinare quelli equidistanti dall'origine e dal punto $(5,7)$.

Sol. Imponiamo che siano uguali le distanze tra il generico punto candidato e i due punti fissi:

$$\sqrt{((2t-3)-5)^2+((t+1)-7)^2}=\sqrt{((2t-3)-0)^2+((t+1)-0)^2}\ \Rightarrow t=\frac{45}{17}\ .$$

Sostituendo il valore trovato otteniamo il punto $(\frac{39}{17},\frac{62}{17})$. Osserviamo che i punti candidati si muovono lungo una retta; infatti $y=t+1$ equivale a $t=y-1$ che sostituito nell'equazione $x=2t-3$ dà $x-2y+5=0$. Su questa retta si trova in particolare il punto richiesto.

Nella **lezione del 7 ottobre** sono stati trattati soltanto esercizi della raccolta "Esercizi e note".

Lunedì 14 ottobre

• Determinare il punto medio, M, rispetto ai punti $A=(3,\sqrt{5})$ e $B=(9,3\sqrt{5})$. Scrivere un'equazione cartesiana dell'asse del segmento AB.

Sol. $M=(\frac{3+9}{2},\frac{\sqrt{5}+3\sqrt{5}}{2})=(6,2\sqrt{5})$. Ricordiamo che l'asse di un segmento è la retta perpendicolare al segmento e passante per il suo punto medio. Il coefficiente angolare dell'asse è opposto e inverso rispetto al coefficiente del vettore $\overrightarrow{AB}=(9-3,3\sqrt{5}-\sqrt{5})=(6,2\sqrt{5})$. Quest'ultimo coefficiente vale $\frac{\sqrt{5}}{3}$, quindi il coefficiente richiesto è $-\frac{3}{\sqrt{5}}$. Notiamo che in questo esercizio, per una coincidenza, il vettore $\overrightarrow{AB}$ risulta uguale al punto medio M; ciò accade perché le coordinate di B sono il triplo di quelle di A, quindi $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$. Attenzione: tale coincidenza è un'occasione per riflettere sulla distinzione tra punti e vettori espressi dagli stessi simboli ma diversi come enti geometrici! Tornando all'equazione dell'asse, essa è del tipo $y=-\frac{3}{\sqrt{5}}x+q$ e il passaggio per M forza q ad essere uguale a $2\sqrt{5}+\frac{18}{\sqrt{5}}$.

Come approfondimento, ripetiamo lo stesso esercizio con il nuovo $B=(15,5\sqrt{5})$. Ora $M=(\frac{3+15}{2},\frac{\sqrt{5}+5\sqrt{5}}{2})=(9,3\sqrt{5})$, mentre $\overrightarrow{AB}=(15-3,5\sqrt{5}-\sqrt{5})=(12,4\sqrt{5})$. Il coefficiente angolare da utilizzare è comunque lo stesso di prima, mentre ora $q=3\sqrt{5}+\frac{27}{\sqrt{5}}$. L'equazione è quindi $y=-\frac{3}{\sqrt{5}}x+3\sqrt{5}+\frac{27}{\sqrt{5}}$.

Lunedì 21 ottobre

• Calcolare l'inversa della matrice

$$L=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&-5&6\\-7&-2&0\end{pmatrix}\ .$$

Sol. Calcoliamo intanto il determinante di L col metodo di Sarrus; costruiamo dunque una griglia 3×5 opportuna,

$$\begin{bmatrix}1&2&3&1&2\\4&-5&6&4&-5\\-7&-2&0&-7&-2\end{bmatrix}\ ,$$

per poi effettuare il calcolo $0-84-24-105+12-0=-201$. Costruiamo ora la trasposta di L,

$$L^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & -5 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} .$$

Con l'aiuto di L^t e della scacchiera 3×3,

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} ,$$

ricaviamo – grazie al metodo ben noto – i 9 numeri che divisi per -201 formeranno la matrice inversa richiesta. Otteniamo:

$$L^{-1} = -\frac{1}{201}\begin{pmatrix} 12 & -6 & 27 \\ -42 & 21 & 6 \\ -43 & -12 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{67} & -\frac{2}{67} & \frac{9}{67} \\ -\frac{14}{67} & \frac{7}{67} & \frac{2}{67} \\ -\frac{43}{201} & -\frac{4}{67} & -\frac{13}{201} \end{pmatrix}.$$

- Calcolare le coordinate del vettore $3\vec{i}+2\vec{j}$ rispetto alla base $\{\vec{i}+\vec{j}, \vec{i}-\vec{j}\}$.

Sol. Imponendo che $h(1,1)+k(1,-1)$ sia uguale a $(3,2)$ otteniamo la condizione $(h,h)+(k,-k)=(3,2)$ che conduce al sistema

$$\begin{cases} h+k=3 \\ h-k=2 \end{cases} .$$

La soluzione, $h=\frac{5}{2}$ e $k=\frac{1}{2}$, dà le due coordinate richieste.

Osserviamo che i due vettori della base $\{\vec{i}+\vec{j}, \vec{i}-\vec{j}\}$ non sono *versori*, quindi i due numeri trovati non rappresentano le lunghezze delle proiezioni sui nuovi assi (con l'occasione notiamo che l'ordine dei nuovi assi è invertito, cosa che in generale può accadere). Se però *normalizziamo* i due vettori trasformandoli in $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, la condizione da considerare diventa $\frac{1}{\sqrt{2}}(h',h')+\frac{1}{\sqrt{2}}(k',-k')=(3,2)$ e il relativo sistema è ora

$$\begin{cases} h'+k'=3\sqrt{2} \\ h'-k'=2\sqrt{2} \end{cases} .$$

In questo caso le coordinate $h'=\frac{5}{2}\sqrt{2}$ e $k'=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ esprimono anche le lunghezze effettive delle proiezioni del vettore $(3,2)$ sui nuovi assi. Dunque l'utilizzo dei versori consente di equiparare le coordinate alle proiezioni vere e proprie, senza alterazioni di scala. Se invece disponiamo di vettori che non hanno lunghezza unitaria – come nel testo dell'esercizio – le coordinate restano sempre numeri importanti, necessari per descrivere la posizione esatta come combinazione di due grandezze iniziali, ma non sono fedeli per quanto riguarda le distanze reali.

Lunedì 28 ottobre

- Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ -x+y+z=4 \\ 2y-z=1 \end{cases}$$

mediante il calcolo dell'inversa (si tratta di una versione della formula di Cramer).

Sol. Una volta calcolata la matrice inversa della matrice incompleta M, è sufficiente moltiplicarla per la colonna dei termini noti. Abbiamo infatti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ma sappiamo che il prodotto $M^{-1}M$ dà la matrice identità. Quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e infine

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

In conclusione troviamo $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2}$, $z = 2$. (Invece di eseguire l'ultimo prodotto potremmo considerare il penultimo, per poi moltiplicare il risultato per $-\frac{1}{6}$.)

- Verificare il teorema di Binet per il prodotto

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Sol. Il prodotto di queste due matrici è la matrice

$$\begin{pmatrix} 7 & 15 \\ -8 & -28 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è uguale a $-196 + 120 = -76$. D'altra parte, moltiplicando i due singoli determinanti otteniamo $-4 \cdot 19 = -76$.

Osserviamo che un analogo del teorema di Binet per la *somma* di matrici non vale in generale, come sarebbe facile mostrare con alcuni semplici esempi (esercizio).

Lunedì 4 novembre

- Calcolare la proiezione ortogonale del punto $P = (4, 7)$ sulla retta r di equazione $y = 2x - 3$.

Sol. Costruiamo intanto le equazioni parametriche della retta r' passante per P e perpendicolare a r. Un vettore perpendicolare a $\overrightarrow{v_r} = (1,2)$ è ad esempio $\overrightarrow{w} = (2,-1)$. Abbiamo quindi $(x,y) = (2,-1)t + (4,7)$ o, separatamente, $x = 2t+4$, $y = -t+7$. Sostituendo queste identità nell'equazione di r otteniamo

$$-t+7 = 2(2t+4) - 3 \Rightarrow 5t = 2 \Rightarrow t = \frac{2}{5} \ .$$

La t trovata rappresenta l'istante in cui il punto mobile, sulla retta ortogonale a r e passante per P, incontra r. In tale istante il punto corrispondente è

$$\left(2\frac{2}{5} + 4, -\frac{2}{5} + 7\right) = \left(\frac{24}{5}, \frac{33}{5}\right) \ .$$

- Stabilire se il prodotto scalare di due versori può valere -1 e se può valere -2.

Sol. Poiché il prodotto scalare di due vettori qualunque $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ vale $||\overrightarrow{u}|| \cdot ||\overrightarrow{v}|| \cos\theta$ (essendo θ l'angolo tra i due vettori), nel caso dei versori otteniamo $1 \cdot 1 \cos\theta = \cos\theta$. Se i due versori sono opposti abbiamo $\theta = \pi$ e quindi il prodotto scalare è uguale a $\cos\pi = -1$, mentre non è possibile ottenere -2, in alcun caso.

- Verificare che il versore $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ resta invariato a seguito della trasformazione descritta dalla legge

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \ .$$

Verificare, inoltre, che il versore $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ cambia invece verso (mantenendo la stessa direzione). Descrivere infine il significato geometrico di questa analisi.

Sol. È sufficiente effettuare i seguenti calcoli:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \ .$$

Il movimento rigido in esame può essere interpretato come la sequenza di due movimenti: prima ruotiamo il riferimento di 60° in senso antiorario e successivamente scambiamo gli assi. In realtà, i calcoli effettuati consentono di rileggere questa concatenazione come una riflessione del riferimento Oxy avente per asse la retta inclinata di 30° (in senso antiorario) rispetto all'asse x. Il secondo versore, quello che cambia verso, rappresenta infatti la retta perpendicolare all'asse di riflessione; questa perpendicolare viene riflessa e resta se stessa globalmente, ma i suoi punti sono portati nella parte opposta rispetto all'origine, dunque le due semirette che formano tale perpendicolare vengono scambiate.

Lunedì 11 novembre

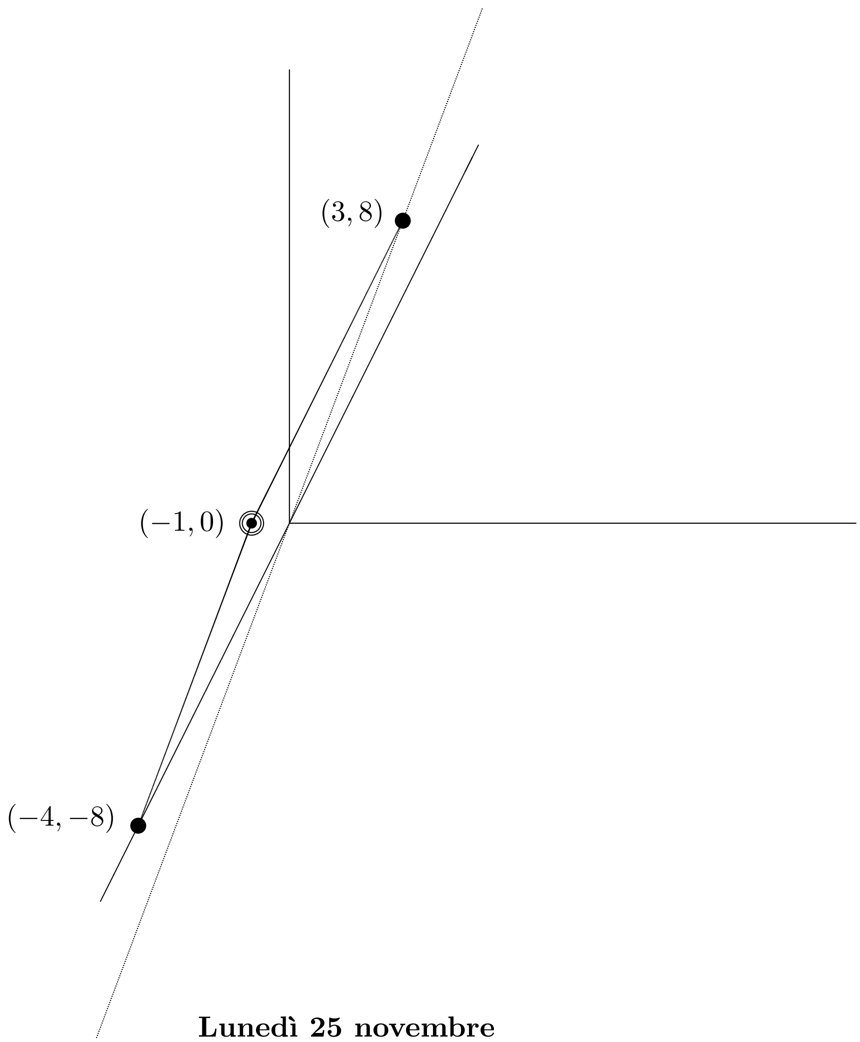
- Supponendo di avere un riferimento ortogonale $\mathcal{R} = \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}_O$, determinare il coseno dell'angolo α formato dai vettori del nuovo riferimento $\mathcal{S} = \{\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}, 3\overrightarrow{u} + 8\overrightarrow{v}\}_O$. Successivamente, a partire da un punto P le cui coordinate rispetto a $\mathcal{S}$ sono $(-4,1)$, scrivere le coordinate di P rispetto al riferimento $\mathcal{R}$ e rappresentare geometricamente il punto.

Sol. Calcoliamo il coseno con la consueta formula:

$$\cos\alpha = \frac{(\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}) \times (3\overrightarrow{u} + 8\overrightarrow{v})}{||\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}|| \cdot ||3\overrightarrow{u} + 8\overrightarrow{v}||} = \frac{(1,2) \times (3,8)}{||(1,2)|| \cdot ||(3,8)||} = \frac{3+16}{\sqrt{5}\sqrt{73}} = \frac{19}{\sqrt{365}} \ .$$

Notiamo che 365 è di poco maggiore del quadrato di 19 (361), quindi il coseno vale quasi 1: l'angolo α è prossimo allo zero.

Nel riferimento $\mathcal{R}$ le coordinate di P sono uguali a $-4(1,2)+1(3,8) = (-4,-8)+(3,8) = (-1,0)$.



Lunedì 25 novembre

- Scrivere equazioni cartesiane della retta passante per $B = (3,1,2)$ e parallela al vettore $\overrightarrow{v} = (1,6,5)$.

Sol. Scriviamo le equazioni parametriche di questa retta, per poi trasformarle in equazioni cartesiane. La forma parametrica è

$$(x,y,z) = t(1,6,5) + (3,1,2) \ \text{ o anche } \ \begin{cases} x = t+3 \\ y = 6t+1 \\ z = 5t+2 \end{cases} .$$

Ora trasformiamo queste equazioni in due equazioni cartesiane. Partiamo dalla facile relazione $t = x-3$ per poi sostituirla nelle restanti equazioni. Otteniamo $y = 6(x-3)+1$ e $z = 5(x-3)+2$;

possiamo quindi scrivere le equazioni come

$$\begin{cases} 6x - y - 17 = 0 \\ 5x - z - 13 = 0 \end{cases} .$$

Si tratta infatti di due piani la cui intersezione è la retta in esame. Notiamo che il primo piano è una "parete" obliqua (infinita) la cui traccia sul piano Oxy è la retta di equazione $y = 6x - 17$ (una retta nel piano Oxy è descritta infatti da una sola equazione). In termini colloquiali, la parete si innalza lungo la traccia; ogni punto (x_0, y_0) della traccia dà luogo alla retta costituita dai punti (x_0, y_0, k) con $k \in \mathbf{R}$.

Lunedì 9 dicembre – preparazione alla prova scritta (I).

La prova scritta consisterà di un certo numero di esercizi con la richiesta di risolverne almeno 4. Ogni esercizio verrà valutato con giudizi (buono, sufficiente, ecc.) e commenti aggiuntivi. I risultati verranno poi comunicati al docente del corso principale (Geomatica e attività catastale).

- Calcolare il prodotto

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} .$$

Sol. Le forme delle due matrici sono compatibili (le colonne della prima sono tante quante le righe della seconda), quindi il prodotto può essere effettivamente calcolato ed è uguale alla matrice 2×2

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 10 & 9 \end{pmatrix} .$$

- Calcolare la distanza tra il punto $P = (8, 1)$ e la retta r descritta dall'equazione $y = 3x - 4$.

Sol. Possiamo applicare la classica formula; occorre però considerare la forma implicita della retta: $3x - y - 4 = 0$. Ora abbiamo:

$$\delta = \frac{|3 \cdot 8 - 1 \cdot 1 - 4|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{19}{\sqrt{10}} .$$

In alternativa possiamo trovare il punto di intersezione tra r e la perpendicolare passante per P, di equazione $y = -\frac{1}{3}x + q$ e con q determinato dal passaggio per P:

$$1 = -\frac{1}{3} \cdot 8 + q \Rightarrow q = \frac{11}{3} .$$

Dal sistema tra le due rette otteniamo il punto $H = \left(\frac{23}{10}, \frac{29}{10}\right)$; infine occorre calcolare la lunghezza $\overline{PH}$.

- Dato un riferimento Oxy, scrivere la legge del cambiamento di coordinate relativa alla rotazione antioraria di 135°. Come viene trasformata l'equazione della retta $y = x + 4$?

Sol. I versori dei nuovi assi cartesiani sono $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Essi consentono di scrivere la legge richiesta:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} .$$

Separando le due componenti otteniamo

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y \quad , \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y \quad .$$

Sostituendole nell'equazione originale otteniamo

$$\frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y = -\frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y + 4 \ ,$$

che può essere ridotta alla forma

$$X = \frac{4}{\sqrt{2}} \ .$$

La nuova equazione rappresenta una retta parallela al nuovo asse Y. Infatti il riferimento è stato ruotato in modo tale da eliminare la pendenza della retta; ora la retta appare "verticale".

- Calcolare il coseno dell'angolo θ formato dai vettori $\overrightarrow{v} = (1, 3, 8)$ e $\overrightarrow{w} = (-1, -2, 7)$.

Sol. Applichiamo la classica formula,

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}}{||\overrightarrow{v}|| \cdot ||\overrightarrow{w}||} = \frac{-1-6+56}{\sqrt{1+9+64}\sqrt{1+4+49}} = \frac{49}{\sqrt{74}\sqrt{54}} \ .$$

- Determinare il valore di $h \in \mathbf{R}$ tale che il vettore $(7, 2h)$ risulti perpendicolare al vettore $(3, -8)$.

Sol. Il prodotto scalare dei due vettori deve essere nullo. Imponiamo dunque che $7 \cdot 3 + 2h \cdot (-8)$ sia uguale a 0. Abbiamo:

$$21 - 16h = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{21}{16} \ .$$

Lunedì 16 dicembre – preparazione alla prova scritta (II).

- Calcolare il coseno dell'angolo formato dalle rette espresse in forma parametrica come

$$r : \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -t + 1 \\ z = 2t + 7 \end{cases} \quad , \quad s : \begin{cases} x = 4t + 2 \\ y = 2t + 1 \\ z = 3t + 7 \end{cases}$$

Sol. I vettori direttori delle due rette sono $\overrightarrow{v}_r = (3, -1, 2)$ e $\overrightarrow{v}_s = (4, 2, 3)$. Le due rette si incontrano nel punto $(2, 1, 7)$ ma qualunque altro punto porterebbe allo stesso metodo risolutivo. Il coseno richiesto è uguale a

$$\frac{(3, -1, 2) \times (4, 2, 3)}{\sqrt{9+1+4}\sqrt{16+4+9}} = \frac{16}{\sqrt{14}\sqrt{29}} \ .$$

• Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $\overrightarrow{h} = (5, 11)$ sulla retta passante per l'origine e diretta secondo il vettore $\overrightarrow{k} = (8, 7)$.

Sol. È sufficiente applicare la nota formula:

$$p = \frac{(5,11) \times (8,7)}{\sqrt{8^2 + 7^2}} = \frac{117}{\sqrt{113}} .$$

In alternativa possiamo intanto calcolare la distanza del *punto* $H = (5, 11)$ dalla retta in esame, la cui equazione è $y = \frac{7}{8}x$. Applicando la classica formula per la distanza abbiamo:

$$\delta = \frac{|\frac{7}{8}(5) - 1(11)|}{\sqrt{\frac{49}{64} + 1}} = (...) = \frac{53}{\sqrt{113}} .$$

Ora, poiché $\overline{OH} = \sqrt{5^2 + 11^2} = \sqrt{146}$, grazie al teorema di Pitagora otteniamo la proiezione:

$$p = \sqrt{\left(\sqrt{146}\right)^2 - \left(\frac{53}{\sqrt{113}}\right)^2} = \sqrt{146 - \frac{2809}{113}} = \frac{117}{\sqrt{113}} .$$

Un ulteriore metodo risolutivo consiste nel calcolare l'intersezione della retta data con la perpendicolare passante per H; la proiezione sarà la lunghezza $\overline{OH}$.

• Dimostrare - mediante un disegno in cui compaiono opportuni angoli - che la seguente legge esprime una riflessione del riferimento con asse inclinato di $60°$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} .$$

Successivamente dimostrare la stessa proprietà mostrando che l'equazione dell'asse resta invariata dopo la trasformazione, mentre il versore perpendicolare cambia verso.

Sol. I nuovi versori del riferimento sono le colonne della matrice. Esse rappresentano due versori inclinati rispettivamente di $120°$ e $30°$ rispetto all'asse delle x crescenti. Il movimento rigido che porta il vecchio riferimento Oxy nel nuovo, OXY, è dunque una riflessione il cui asse deve essere simmetrico rispetto alle coppie di assi x e X, oppure rispetto agli y e Y: l'angolo è necessariamente quello di $60°$.

Dal punto di vista algebrico, l'equazione dell'asse è $y = x\sqrt{3}$ (infatti il coefficiente angolare dell'asse è la tangente di $60°$). Sostituendo a x e y i polinomi dati dalle leggi $x = -\frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y$ e $y = \frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y$, otteniamo

$$\frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y\right) \Rightarrow 2\frac{\sqrt{3}}{2}X = \frac{3}{2}Y - \frac{1}{2}Y \Rightarrow \sqrt{3}X = Y .$$

Infine, sostituendo il versore $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ perpendicolare all'asse, otteniamo

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

- Calcolare l'inversa della matrice $R = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ e utilizzarla per risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2 = 0 \\ 6x - 5y = 8 \end{cases} .$$

Sol. Il determinante di R vale -39. Scriviamo la trasposta R^t, uguale a $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, e lavoriamo con la trasposta per calcolare i complementi algebrici (eliminiamo la riga e la colonna corrispondenti al posto in esame e poi consideriamo la scacchiera). Otteniamo così l'inversa,

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{39} & \frac{4}{39} \\ \\ \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} \end{pmatrix} .$$

Ora il sistema può essere risolto col metodo di Cramer (versione con moltiplicazione immediata per l'inversa). Otteniamo:

$$\begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{39} & \frac{4}{39} \\ \\ \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{22}{39} \\ \\ -\frac{12}{13} \end{pmatrix} .$$

Possiamo scrivere la soluzione per le due incognite separatamente: $x = \frac{22}{39}$ e $y = -\frac{12}{13}$.