Probabilità e Statistica I (11/6/2005)

(Ing. Civile e Trasporti - Roma)

1. Un cassetto contiene 6 chiavi, delle quali 2 sono adatte ad aprire una certa serratura. Dal cassetto si prendono in blocco 3 chiavi, una delle quali scelta a caso viene utilizzata per cercare di aprire la serratura. Definiti gli eventi $H_r =$ *"fra le 3 chiavi prese in blocco ve ne sono r adatte ad aprire la serratura"*, $r = 0, 1, 2$; $E =$ *"la chiave scelta a caso apre la serratura"*, calcolare $P(H_2|E)$.

$$P(H_2|E) =$$

2. La densità di probabilità di un numero aleatorio X è $f(x) = \frac{x+1}{2}$, per $x \in [-1, 0]$, $f(x) = \frac{1}{2}$, per $x \in (0, \frac{3}{2}]$, $f(x) = 0$ altrove. Calcolare il valore x_0 tale che $P(X > x_0) = 3P(X \leq x_0)$.

$$x_0 =$$

3. I tempi aleatori impiegati da due veicoli per percorrere un tratto di strada sono rispettivamente X e Y. La densità congiunta del vettore (X, Y) è $f(x, y) = ax + (2 - a)y$, per $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, con $a \in [0, 2]$ e con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare il valore di a tale che gli eventi $(X \leq Y)$ e $(X > Y)$ sono equiprobabili.

$$a =$$

4. Il codominio di un vettore aleatorio discreto (X, Y) è $\mathcal{C} = \{(0, 2), (1, 1), (2, 0), (2, 2)\}$. Posto $P(X = x, Y = y) = p(x, y)$, si assuma $p(0, 2) = p(1, 1) = p(2, 0) = p > 0$. Determinare il valore p tale che la covarianza di X, Y è nulla.

$$p =$$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, determinare l'insieme I (eventualmente vuoto) dei valori di p tali che X e Y sono stocasticamente indipendenti.

$$I =$$

Probabilità e Statistica I

(Ing. Civile e Trasporti - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 11/6/2005.

1. Si ha

$$P(H_r) = \frac{\binom{2}{r}\binom{4}{3-r}}{\binom{6}{3}}\,, \quad r = 0, 1, 2\,;$$

quindi

$$P(H_0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5}\,, \quad P(H_1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{3}{5}\,, \quad P(H_2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{4}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5}\,;$$

inoltre

$$P(E|H_0) = 0\,, \quad P(E|H_1) = \frac{1}{3}\,, \quad P(E|H_2) = \frac{2}{3}\,.$$

Pertanto

$$P(E) = P(E|H_0)P(H_0) + P(E|H_1)P(H_1) + P(E|H_2)P(H_2) = 0 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{3}\,;$$

infine

$$P(H_2|E) = \frac{P(E|H_2)P(H_2)}{P(E)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{5}\,.$$

2. Essendo $P(X \leq x_0) + P(X > x_0) = 1$, dev'essere $P(X \leq x_0) = \frac{1}{4}$, $P(X > x_0) = \frac{3}{4}$. Allora, osservando che

$$\int_{-1}^{0} \frac{x+1}{2}\,dx = \frac{1}{4}\,, \qquad \int_{0}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\,(\frac{3}{2} - x_0) = \frac{3}{4}\,,$$

segue: $x_0 = 0$.

3. Dev'essere $P(X \leq Y) = P(X > Y) = \frac{1}{2}$. Allora, segue

$$P(X > Y) = \int_0^1 dx \int_0^x [ax + (2-a)y]\,dy = \int_0^1 [axy + \frac{2-a}{2}\,y^2]_0^x\,dx =$$

$$= \int_0^1 (ax^2 + \frac{2-a}{2}\,x^2)\,dx = \frac{2+a}{6}\,[x^3]_0^1 = \frac{2+a}{6} = \frac{1}{2} \iff a = 1\,.$$

4. Essendo $p(0,2)+p(1,1)+p(2,0)=3p\leq 1$, segue $0<p\leq \frac{1}{3}$. Inoltre

$$X\in\{0,1,2\}\,,\quad Y\in\{0,1,2\}\,,\quad XY\in\{0,1,4\}\,,$$

con

$$P(X=0)=P(X=1)=p\,,\quad P(X=2)=1-2p\,,$$
$$P(Y=0)=P(Y=1)=p\,,\quad P(Y=2)=1-2p\,,$$
$$P(XY=0)=2p\,,\quad P(XY=1)=p\,,\quad P(XY=4)=1-3p\,,$$
$$\mathbb{P}(X)=\mathbb{P}(Y)=2-3p\,,\quad \mathbb{P}(XY)=4-11p\,.$$

Ricordando che $p>0$, si ha

$$Cov(X,Y)=\mathbb{P}(XY)-\mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y)=-9p^2+p=0 \iff p=\frac{1}{9}\,.$$

5. Osservando, ad esempio, che

$$P(X=1,Y=1)\;=\;P(X=1)\;=\;P(Y=1)\;=\;p\,,$$

segue

$$P(X=1,Y=1)\;=\;p\;\neq\;p^2\;=\;P(X=1)P(Y=1)\,,\quad \forall\, p\in(0,\frac{1}{3}]\,;$$

cioè, non esistono valori di p tali che X e Y sono stocasticamente indipendenti.
Pertanto: $I=\emptyset$.

Metodo alternativo:
ricordando che l'indipendenza implica l'incorrelazione, segue $I\subseteq\{\frac{1}{9}\}$.
D'altra parte, per $p=\frac{1}{9}$ si ha, ad esempio

$$P(X=1,Y=1)\;=\;\frac{1}{9}\;\neq\;\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\;=\;P(X=1)P(Y=1)\,;$$

pertanto: $I=\emptyset$.