Probabilità e Statistica I (16/9/2005)

(Ing. Civile e Trasporti - Roma)

1. Sia dato un triangolo di vertici A, B, C. Una formica, posizionata inizialmente in A, si sposta a caso in uno degli altri due vertici, continuando in questo modo negli spostamenti successivi. Sia X il numero aleatorio di passi fino alla prima volta in cui la formica si sposta nel vertice C. Calcolare la probabilità dell'evento $(X > n)$ e la previsione di X.

   $P(X > n) =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $I\!P(X) =$

2. La densità di probabilità di un numero aleatorio X è $f(x) = \frac{1}{2}$, per $x \in [-\frac{3}{2}, 0]$, $f(x) = \frac{-x+1}{2}$, per $x \in (0, 1]$, con $f(x) = 0$ altrove. Determinare la funzione di ripartizione di X.

$$F(x) = \begin{cases} & , \\ & , \\ & , \\ & , \end{cases}$$

3. Siano dati due lotti L_1 ed L_2, contenenti ciascuno 1 componente difettoso e 4 buoni. Da ognuno dei due lotti si estraggono in blocco 2 componenti, con i quali si forma un lotto L_3. Indicando con X il numero aleatorio di pezzi difettosi contenuti in L_3, calcolare, per ogni valore possibile x di X, la probabilità p_x dell'evento $(X = x)$.
   (*Nota: indicare con Y (risp., Z) il numero di pezzi difettosi estratti da L_1 (risp., L_2)*).

   $x :$

   $p_x :$

4. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = k(x + y)$, per $(x, y) \in [0, 2] \times [0, 1]$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare il valore della costante k e la previsione del numero aleatorio XY.

   $k =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $I\!P(XY) =$

Probabilità e Statistica I (Ing. Civile e Trasporti - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 16/9/2005.

1. L'evento $(X > n)$ si verifica se e solo se nei primi n passi la formica si sposta da A a B e viceversa, senza mai andare in C. Definiti gli eventi $E_k =$ *"al k-mo passo la formica si sposta in C "*, $k = 1, 2, \ldots$, si ha

   $$P(X > n) = P(E_1^c \cdots E_n^c) = P(E_1^c)P(E_2^c|E_1^c) \cdots P(E_n^c|E_1^c \cdots E_{n-1}^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

   Inoltre

   $$P(X = n) = P(E_1^c \cdots E_{n-1}^c E_n) = P(E_1^c)P(E_2^c|E_1^c) \cdots P(E_n|E_1^c \cdots E_{n-1}^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n ;$$

   quindi X ha una distribuzione geometrica di parametro $p = \frac{1}{2}$. Pertanto:

   $$\mathbb{P}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \cdots = \frac{1}{p} = 2 .$$

2. Si ha $F(x) = 0$, per $x \leq -\frac{3}{2}$, $F(x) = 1$, per $x \geq 1$. Inoltre, per $x \in (-\frac{3}{2}, 0]$, si ha

   $$F(x) = \int_{-\frac{3}{2}}^{x} \frac{1}{2}\, dt = \frac{1}{2}(x + \frac{3}{2}) = \frac{x}{2} + \frac{3}{4} .$$

   Infine, per $x \in (0, 1)$, si ha

   $$F(x) = \int_{-\frac{3}{2}}^{0} \frac{1}{2}\, dt + \int_{0}^{x} \frac{-t+1}{2}\, dt = \frac{3}{4} + \frac{-x^2 + 2x}{4} = \frac{-x^2 + 2x + 3}{4} .$$

3. Si ha $X = Y + Z$, con Y e Z stocasticamente indipendenti e con

   $$P(Y = 0) = P(Z = 0) = \frac{\binom{4}{2}\binom{1}{0}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{5}, \qquad P(Y = 1) = P(Z = 1) = \frac{2}{5} .$$

   Allora $X \in \{0, 1, 2\}$, con

   $$P(X = 0) = p_0 = P(Y = 0)P(Z = 0) = \tfrac{9}{25} ,$$

   $$P(X = 1) = p_1 = P(Y = 0)P(Z = 1) + P(Y = 1)P(Z = 0) = \tfrac{12}{25} ,$$

   $$P(X = 2) = p_2 = P(Y = 1)P(Z = 1) = \tfrac{4}{25} .$$

4. Si ha

   $$\int_0^2 \int_0^1 k(x + y)\, dxdy = \cdots = 3k = 1 ;$$

   pertanto: $k = \frac{1}{3}$. Inoltre

   $$\mathbb{P}(XY) = \int_0^2 \int_0^1 xy \cdot \frac{1}{3}(x + y)\, dxdy = \cdots = \frac{2}{3} .$$