Probabilità e Statistica I (10/1/2006)

(Ing. Civile e Trasporti - Roma)

1. Sia data una costante $a \in (0, 2)$. Stabilire per quale valore di a la funzione $f(x) = x$, per $x \in [0, a]$, $f(x) = a$, per $x \in (a, 2]$, con $f(x) = 0$ altrove, è una densità di probabilità. Calcolare inoltre la probabilità α dell'evento $(X > 1)$.

   $a =$ $\alpha =$

2. Con riferimento all'esercizio precedente e utilizzando il valore trovato per a, dato un numero aleatorio X con densità $f(x)$, determinare la funzione di ripartizione di X.

$$F(x) = \begin{cases} & , \\ & , \\ & , \\ & , \end{cases}$$

3. Da un'urna, contenente 1 pallina bianca e 4 nere, si effettuano n estrazioni con restituzione. Indicando con X il numero aleatorio di volte in cui esce pallina bianca e con h un valore possibile di X, calcolare la probabilità $p_h = P(X = h)$. Inoltre, considerando l'evento $E_1 =$ *"nella* 1^a *estrazione esce pallina bianca"*, calcolare la probabilità condizionata $\gamma = P(E_1 | X \geq 1)$.

   $p_h =$ $\gamma =$

4. Un sistema S è costituito da due dispositivi in parallelo, con tempi di durata aleatoria fino al guasto rispettivamente X, Y, stocasticamente indipendenti e con uguale distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 2$. Calcolare la previsione del tempo aleatorio T di durata fino al guasto di S.

   $\mathbb{P}(T) =$

5. La densità iniziale $\beta(\theta)$ di un parametro aleatorio Θ è $\beta(\theta) = e^{-\theta}$, $\theta \geq 0$, con $\beta(\theta) = 0$ altrove. Le componenti di un campione casuale $X = (X_1, \ldots, X_4)$ hanno, per ogni fissato valore θ di Θ, una stessa densità $f(x_i|\theta) = \theta e^{-\theta x_i}, x_i \geq 0$, con $f(x_i|\theta) = 0$ altrove, $i = 1, 2, 3, 4$. Supposto di aver osservato un campione casuale $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 2, 5, 1)$, calcolare la funzione di verosimiglianza $\alpha(x \,|\, \theta)$ e la densità finale $\beta(\theta \,|\, x)$.

   $\alpha(x \,|\, \theta) =$ $\beta(\theta \,|\, x) =$

Probabilità e Statistica I (Ing. Civile e Trasporti - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 10/1/2006.

1. Dev'essere $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; ovvero: $\int_0^a x dx + \int_a^2 a dx = \cdots = \frac{a^2}{2} + a(2-a) = 1$. Allora, ricordando che $0 < a < 2$, segue: $a = 2 - \sqrt{2}$. Infine
$$\alpha = P(X > 1) = \int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^2 (2 - \sqrt{2})\, dx = 2 - \sqrt{2}\,.$$

2. Per $x \leq 0$ si ha $F(x) = 0$; per $x \in (0, 2 - \sqrt{2}]$ si ha $F(x) = \int_0^x t\, dt = \frac{x^2}{2}$; per $x \in (2 - \sqrt{2}, 2)$ si ha
$$F(x) = \int_0^{2-\sqrt{2}} t\, dt + \int_{2-\sqrt{2}}^{x} (2 - \sqrt{2})\, dt = \cdots = (2 - \sqrt{2})x - 3 + 2\sqrt{2}\,;$$
per $x \geq 2$ si ha $F(x) = 1$.

3. X ha una distribuzione binomiale $B(n, \frac{1}{5})$; pertanto
$$p_h = P(X = h) = \binom{n}{h} \left(\frac{1}{5}\right)^h \left(\frac{4}{5}\right)^{n-h} \quad , \quad h = 0, 1, \ldots, n\,.$$
Inoltre
$$\gamma = P(E_1 | X \geq 1) = \frac{P[E_1 \wedge (X \geq 1)]}{P(X \geq 1)} = \frac{P(E_1)}{1 - P(X=0)} = \frac{\frac{1}{5}}{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n} = \frac{5^{n-1}}{5^n - 4^n}\,\cdot$$

4. Per ogni fissato $t > 0$, si ha: $P(X \leq t) = P(Y \leq t) = 1 - e^{-2t}$. Allora
$$P(T \leq t) = P(X \leq t, Y \leq t) = P(X \leq t)P(Y \leq t) = (1 - e^{-2t})^2\,,$$
con $P(T \leq t) = 0$, per ogni $t \leq 0$. Pertanto, la densità di probabilità di T è
$$f(t) = 4e^{-2t}(1 - e^{-2t}) = 4e^{-2t} - 4e^{-4t}\,,$$
per $t > 0$, con $f(t) = 0$ altrove. Quindi:
$$\mathbb{P}(T) = \int_0^{+\infty} t f(t) dt = 2\int_0^{+\infty} t \cdot 2e^{-2t} dt - \int_0^{+\infty} t \cdot 4e^{-4t} dt = 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\,\cdot$$
(*Nota:* $\mathbb{P}(T) = \frac{1}{\lambda}(1 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}\,\cdot$)

5. Per ogni $\theta \geq 0$ si ha
$$\alpha(x \,|\, \theta) = f(x_1|\theta) f(x_2|\theta) f(x_3|\theta) f(x_4|\theta) = \theta e^{-4\theta} \theta e^{-2\theta} \theta e^{-5\theta} \theta e^{-\theta} = \theta^4 e^{-12\,\theta}\,,$$
$$\beta(\theta \,|\, x) = k(x)\beta(\theta)\alpha(x \,|\, \theta) = k(x)\, e^{-\theta}\theta^4 e^{-12\,\theta} = k(x)\theta^4 e^{-13\,\theta}\,,$$
con $\beta(\theta \,|\, x) = 0$, per $\theta < 0$.

(*Nota: la distribuzione iniziale di* Θ *è esponenziale di parametro* $\lambda = 1$, *ovvero una Gamma di parametri* $c_0 = 1, \lambda_0 = 1$; *quella finale è una Gamma di parametri* $c_4 = 5, \lambda_4 = 13$; *quindi* $k(x) = \frac{\lambda_4^{c_4}}{\Gamma(c_4)} = \frac{13^5}{4!}\,\cdot$)