Probabilità e Statistica I (11/7/2006)

(Ing. Civile e Trasporti - Roma)

1. Tre studenti, S_1, S_2, S_3, sostengono una prova d'esame con probabilità di essere promossi, rispettivamente, $\frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$. Assumendo che gli eventi $E_i =$ *"S_i supera l'esame"*, $i = 1, 2, 3$, siano stocasticamente indipendenti, calcolare la probabilità p che esattamente due dei tre studenti abbiano superato l'esame, supposto che almeno uno sia stato promosso.

$$p =$$

2. Da un'urna contenente 1 pallina bianca e 2 nere si effettuano 2 estrazioni senza restituzione. Definiti gli eventi $A =$ *"la pallina bianca esce nella 1^a estrazione"*, $B =$ *"la pallina bianca esce nella 2^a estrazione"*, determinare la funzione di ripartizione del numero aleatorio $X = |A| + 2|B|$.

$$F(x) = \begin{cases} \qquad\qquad , \\ \qquad\qquad , \\ \qquad\qquad , \\ \qquad\qquad , \end{cases}$$

3. Dati due numeri aleatori continui X ed Y, stocasticamente indipendenti e con distribuzione uniforme, rispettivamente, negli intervalli $[1, 4]$ e $[0, 2]$, calcolare la probabilità p dell'evento $(X + Y > 3)$.

$$p =$$

4. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, per ogni (x, y). Calcolare la covarianza dei numeri aleatori $U = X + Y, V = X - Y$.

$$Cov(U, V) =$$

Probabilità e Statistica I (Ing. Civile e Trasporti - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 11/7/2006.

1. Osservando che
$$P(E_1 \vee E_2 \vee E_3) = 1 - P(E_1^c E_2^c E_3^c) = 1 - P(E_1^c)P(E_2^c)P(E_3^c) = 1 - \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{49}{50}\,,$$
segue
$$p = P(E_1E_2E_3^c \vee E_1E_2^cE_3 \vee E_1^cE_2E_3 \,|\, E_1 \vee E_2 \vee E_3) = \frac{P(E_1E_2E_3^c) + P(E_1E_2^cE_3) + P(E_1^cE_2E_3)}{P(E_1 \vee E_2 \vee E_3)} =$$
$$= \frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}}{\frac{49}{50}} = \frac{45}{98}\,.$$

2. Essendo $AB = \emptyset$, i costituenti sono $C_1 = AB^c = A$, $C_2 = A^cB = B$, $C_3 = A^cB^c$, ai quali corrispondono per X rispettivamente i valori: $1,\ 2,\ 0$. Inoltre
$$P(C_1) = \frac{1}{3}\,,\ P(C_2) = P(A^cB) = P(A^c)P(B|A^c) = \cdots = \frac{1}{3}\,,\ P(C_3) = P(A^c)P(B^c|A^c) = \cdots = \frac{1}{3}\,.$$
Pertanto: $P(X=0) = P(X=1) = P(X=2) = \frac{1}{3}$. Allora
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{3}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{2}{3}, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

3. Si ha $f_1(x) = \frac{1}{3}$, per $x \in [1,4]$, con $f_1(x) = 0$ altrove; $f_2(y) = \frac{1}{2}$, per $y \in [0,2]$, con $f_2(y) = 0$ altrove. Pertanto: $f(x,y) = \frac{1}{6}$, per $(x,y) \in [1,4]\times[0,2]$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Allora
$$p = P(X+Y > 3) = 1 - P(X+Y \le 3) = 1 - \int_1^3 dx \int_0^{3-x} f(x,y)\,dy = 1 - \int_1^3 dx \int_0^{3-x} \frac{1}{6}\,dy = \cdots = \frac{2}{3}\,.$$

4. Si ha
$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dy = \cdots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,,\quad \forall\, x\,,$$
$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx = \cdots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,,\quad \forall\, y\,,$$
con $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ per ogni (x,y). Pertanto X ed Y sono stocasticamente indipendenti e con distribuzione normale standard. Allora
$$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}(X+Y) = \mathbb{P}(X-Y) = 0\,,\qquad \mathbb{P}(X^2) = \mathbb{P}(Y^2) = 1\,,$$
e quindi
$$Cov(U,V) = Cov(X+Y, X-Y) = \mathbb{P}[(X+Y)(X-Y)] - \mathbb{P}(X+Y)\mathbb{P}(X-Y) =$$
$$= \mathbb{P}(X^2 - Y^2) = \mathbb{P}(X^2) - \mathbb{P}(Y^2) = 0\,.$$