Probabilità e Statistica I (16/2/2007)

(Ing. Civile e Trasporti - Roma)

1. Siano date tre urne, U_1 contenente 1 pallina bianca e 1 nera, U_2 contenente 2 palline bianche, U_3 contenente 2 palline nere. Per 5 volte si ripete il seguente esperimento: si sceglie a caso una delle tre urne e da tale urna si estrae a caso una pallina. Sia X il numero aleatorio di volte in cui esce pallina bianca su 5 estrazioni. Fissato $h \in \{0, 1, \ldots, 5\}$, calcolare la probabilità dell'evento $X = h$. (*Suggerimento: definire gli eventi* E_j = *"nella j-ma prova viene estratta pallina bianca"*; H_{ij} = *"l'urna utilizzata nella j-ma prova è* U_i*"*, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, \ldots, 5$).

$$P(X = h) =$$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, determinare la funzione di ripartizione del numero aleatorio X.

$$F(x) = \begin{cases} & , \\ & , \\ & , \\ & , \\ & , \\ & , \\ & , \end{cases}$$

3. Una struttura è sollecitata in contemporanea da due forze di entità aleatorie X e Y. La densità congiunta del vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = e^{-x-y}$, per $x \geq 0$, $y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. La struttura cede se si verifica l'evento $(X + Y > 5)$. Calcolare la probabilità condizionata p che la struttura non ceda, supposto che sia $X > 2$.

$$p =$$

4. Le densità marginali di un vettore aleatorio continuo (X, Y) sono rispettivamente $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}}$, $f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{(y-1)^2}{6}}$, per ogni $x \in I\!R$, $y \in I\!R$. Inoltre, il coefficiente di correlazione di X, Y è $\rho = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Calcolare l'equazione della retta di regressione di Y su X.

$$y =$$

Probabilità e Statistica I (Ing. Civile e Trasporti - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 16/2/2007.

1. Si ha $P(H_{ij}) = \frac{1}{3}$, per ogni $i = 1,2,3$, $j = 1,\ldots,5$. Inoltre, gli eventi $E_1,\ldots,E_5$ sono stocasticamente indipendenti, con $X = |E_1| + \cdots + |E_5|$ e con

$$P(E_j|H_{1j}) = \frac{1}{2}\,, \quad P(E_j|H_{2j}) = 1\,, \quad P(E_j|H_{3j}) = 0\,,$$

$$P(E_j) = \sum_i P(E_j|H_{ij})P(H_{ij}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\,.$$

Pertanto X ha una distribuzione binomiale di parametri $n = 5, p = \frac{1}{2}$, da cui segue

$$P(X = h) = \binom{5}{h}\left(\frac{1}{2}\right)^h\left(\frac{1}{2}\right)^{5-h} = \frac{\binom{5}{h}}{2^5}\,, \qquad h = 0,1,\ldots,5\,.$$

2. Osservando che

$$\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1\,, \quad \binom{5}{1} = \binom{5}{4} = 5\,, \quad \binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10\,,$$

segue

$$P(X=0) = P(X=5) = \frac{1}{32}\,, \quad P(X=1) = P(X=4) = \frac{5}{32}\,, \quad P(X=2) = P(X=3) = \frac{10}{32}\,.$$

Pertanto

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{32}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{6}{32}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{16}{32}, & 2 \le x < 3 \\ \frac{26}{32}, & 3 \le x < 4 \\ \frac{31}{32}, & 4 \le x < 5 \\ 1, & x \ge 5 \end{cases}$$

3. Si ha

$$f_1(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x-y}\,dy = \cdots = e^{-x}\,, \quad x \ge 0\,; \qquad f_1(x) = 0\,,\ x < 0\,;$$

$$f_2(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x-y}\,dx = \cdots = e^{-y}\,, \quad y \ge 0\,; \qquad f_2(y) = 0\,,\ y < 0\,.$$

Quindi

$$P(X > 2) = \int_2^{+\infty} e^{-x}\, dx = \cdots = e^{-2}\,.$$

$$P(X+Y \leq 5\,,\, X > 2)) = \int_2^5 dx \int_0^{(5-x)} e^{-x-y}\, dy = \int_2^5 e^{-x}\left(1 - e^{-(5-x)}\right) dx =$$

$$= \int_2^5 e^{-x}\, dx - \int_2^5 e^{-5}\, dx = e^{-2} - e^{-5} - 3e^{-5} = e^{-2} - 4e^{-5}\,.$$

Pertanto

$$p = P(X+Y \leq 5 \,|\, X > 2) = \frac{P(X+Y \leq 5\,,\, X > 2)}{P(X > 2)} = \frac{e^{-2} - 4e^{-5}}{e^{-2}} = 1 - 4e^{-3}\,.$$

4. Ricordando che la densità di probabilità di una distribuzione normale di parametri m, σ è $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, segue che le distribuzioni marginali sono normali di parametri $m_1 = 0$, $m_2 = 1$, $\sigma_1 = \sqrt{2}, \sigma_2 = \sqrt{3}$. Allora, l'equazione della retta di regressione di Y su X, $y = m_2 + \rho \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - m_1)$, nel nostro caso è: $y = 1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\, x$, ovvero: $y = 1 + x$.