Probabilità e Statistica I (26/5/2007)

(Ing. Civile e Trasporti, Canali I, II - Roma)

1. Da un'urna contenente 3 palline bianche e 3 nere si effettuano 3 estrazioni senza restituzione. Definiti gli eventi E_i = *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*, $i = 1, 2, 3$, e posto $\alpha = P(E_1 E_2 \mid E_1 \vee E_2)$, $\beta = P(E_1 E_2 E_3 \mid E_1 E_2 \vee E_1 E_3 \vee E_2 E_3)$, stabilire quale delle seguenti condizioni è valida: (i) $\alpha > \beta$; (ii) $\alpha = \beta$; (iii) $\alpha < \beta$ (*Nota: si tenga presente che* $P(E_1 E_2) = P(E_1 E_3) = P(E_2 E_3)$).

$\alpha \qquad \beta$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la previsine m e lo scarto quadratico medio σ del numero aleatorio $X = |E_1| - |E_2| + |E_3|$.

$m =$ $\qquad\qquad$ $\sigma =$

3. Stabilire per quale valore di a la funzione $f(x) = x$, per $x \in [0, 1]$, $f(x) = a$, per $x \in (1, 2]$, con $f(x) = 0$ altrove, è una densità di probabilità. Calcolare inoltre la funzione di ripartizione di X.

$a =$ $\qquad\qquad$ $F(x) = \begin{cases} & , \\ & , \\ & , \\ & , \end{cases}$

4. Un sistema S è composto da due dispositivi in parallelo A e B. Nell'istante 0 entra in funzione A, mentre B inizia a funzionare nell'istante in cui si guasta A. Siano, rispettivamente, X e Y i tempi aleatori di funzionamento di A e B. La densità congiunta del vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = 4e^{-2(x+y)}$, per $x \geq 0$, $y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Indicando con T la durata aleatoria fino al guasto di S, calcolare la probabilità p_t dell'evento $(T > t)$ e la previsione μ di T.

$p_t =$ $\qquad\qquad$ $\mu =$

Probabilità e Statistica I (Ing. Civile e Trasporti, Canali I-II - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 26/5/2007.

1. Si ha

$$\alpha = P(E_1E_2\,|\,E_1 \vee E_2) = \frac{P[E_1E_2 \wedge (E_1 \vee E_2)]}{P(E_1 \vee E_2)} = \frac{P(E_1E_2)}{1 - P(E_1^cE_2^c)} = \frac{\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}}{1-\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}} = \frac{1}{4}\,.$$

Inoltre, osservando che

$$P(A \vee B \vee C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + PABC)\,,$$

si ha

$$\beta = P(E_1E_2E_3\,|\,E_1E_2 \vee E_1E_3 \vee E_2E_3) = \frac{P[E_1E_2E_3 \wedge (E_1E_2 \vee E_1E_3 \vee E_2E_3)]}{P(E_1E_2 \vee E_1E_3 \vee E_2E_3)} =$$

$$= \frac{P(E_1E_2E_3)}{3P(E_1E_2) - 3P(E_1E_2E_3) + P(E_1E_2E_3)} = \frac{\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}}{3\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5} - 2\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}} = \cdots = \frac{1}{10}\,.$$

Pertanto $\alpha > \beta$.

2. Si ha $m = I\!P(X) = P(E_1) - P(E_2) + P(E_3)$, con

$$P(E_1) = \frac{1}{2}\,, \quad P(E_2) = P(E_1E_2) + P(E_1^cE_2) = \cdots = \frac{1}{2}\,,$$

$$P(E_3) = P(E_1E_2E_3) + P(E_1^cE_2E_3) + P(E_1E_2^cE_3) + P(E_1^cE_2^cE_3) = \cdots = \frac{1}{2}\,,$$

pertanto: $m = \frac{1}{2}$. Inoltre, tenendo conto che $Var(|E_i|) = \frac{1}{4}$ e che

$$Cov(|E_1|,|E_2|) = Cov(|E_1|,|E_3|) = Cov(|E_2|,|E_3|) = P(E_1E_2) - P(E_1)P(E_2) = \cdots = -\frac{1}{20}\,,$$

segue

$$Var(X) = Var(|E_1|) + Var(|E_2|) + Var(|E_3|) - 2Cov(|E_1|,|E_2|) + 2Cov(|E_1|,|E_3|) - 2Cov(|E_2|,|E_3|) =$$

$$= 3Var(|E_1|) - 2Cov(|E_1|,|E_2|) = \frac{3}{4} + \frac{1}{10} = \frac{17}{20}\,.$$

Quindi: $\sigma = \sqrt{\frac{17}{20}}$.

3. Dev'essere $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; ovvero: $\int_0^1 xdx + \int_1^2 adx = \frac{1}{2} + a = 1$; pertanto: $a = \frac{1}{2}$. Allora, $F(x) = 0$ per $x \leq 0$; $F(x) = 1$ per $x \geq 2$; inoltre, per $x \in (0,1]$ si ha

$$F(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}\,;$$

infine, per $x \in (1,2)$ si ha

$$F(x) = \int_0^1 t\,dt + \int_1^x \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2} + \frac{x-1}{2} = \frac{x}{2}\,.$$

4. Si ha $T = X + Y$, $p_t = P(X + Y > t) = 1 - P(X + T \leq t) = 1 - F_T(t)$, con

$$F_T(t) = \int_0^t dx \int_0^{t-x} 4e^{-2(x+y)} dy = \int_0^t 2e^{-2x}[-e^{-2y}]_0^{t-x} dx = \int_0^t 2e^{-2x}(1 - e^{-2(t-x)}) dx =$$

$$= \int_0^t 2e^{-2x} dx - 2e^{-2t} \int_0^t dx = 1 - e^{-2t} - 2te^{-2t} = 1 - (1 + 2t)e^{-2t} \, .$$

Pertanto $p_t = (1 + 2t)e^{-2t}$. Inoltre, si ha

$$f_T(t) = F_T'(t) = -2e^{-2t} + 2(1 + 2t)e^{-2t} = 4te^{-2t} \, , \; t \geq 0 \, ,$$

con $f_T(t) = 0$ altrove; quindi

$$\mu = \int_0^{+\infty} t f_T(t) dt = \int_0^{+\infty} 4t^2 e^{-2t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = \cdots = 1 \, .$$

In altro modo:

$$f_1(x) = \int_0^{+\infty} 4e^{-2(x+y)} dy = 2e^{-2x} \, , \; x \geq 0; \quad f_2(y) = \int_0^{+\infty} 4e^{-2(x+y)} dx = 2e^{-2y} \, , \; y \geq 0;$$

con $f_1(x) = f_2(y) = 0$ altrove. Pertanto X e Y hanno una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 2$ e quindi $I\!\!P(X) = I\!\!P(Y) = \frac{1}{2}$; allora $\mu = I\!\!P(T) = I\!\!P(X) + I\!\!P(Y) = 1$.