Probabilità e Statistica I (16/6/2007)

(Ing. Civile e Trasporti, Canali I, II - Roma)

1. Dati n dischi magnetici, sia X_i il n.a. continuo che rappresenta "la distanza (in micron) dall'inizio di una traccia sull'i-mo disco magnetico sino al primo difetto", $i = 1, \ldots, n$. La densità di probabilità di ciascun X_i è esponenziale di parametro $\lambda = \frac{1}{2000}$. Calcolare la previsione m e la funzione di ripartizione $F(x)$ di X_i, per $x > 0$. Inoltre, definiti gli eventi $E_i = (X_i > 1000)$, $i = 1, \ldots, n$, e indicando con $Z = \frac{|E_1| + \cdots + |E_n|}{n}$ la frazione di dischi la cui distanza sino al primo difetto è maggiore di 1000 micron, calcolare la previsione μ di Z.

   $m =$ $\qquad\qquad$ $F(x) =$ $\qquad\qquad$ $\mu =$

2. Un vettore aleatorio (X, Y) ha una distribuzione uniforme sul triangolo T, di vertici i punti $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$. Le componenti X e Y rappresentano rispettivamente la base e l'altezza (aleatorie) di un rettangolo. Calcolare: (i) la previsione m dell'area A del rettangolo; (ii) la probabilità p che il perimetro del rettangolo sia maggiore di 2.

   $m =$ $\qquad\qquad$ $p =$

3. Un cassetto contiene 5 chiavi indistinguibili delle quali una sola apre una certa serratura. Dal cassetto si prendono in blocco 2 chiavi; quindi, per due volte si utilizza a caso una delle 2 chiavi cercando di aprire la serratura. Definiti gli eventi $H =$ *"fra le 2 chiavi prese in blocco c'è quella che apre la serratura"*, $E_1 =$ *"la chiave scelta a caso la prima volta non apre la serratura"*, $E_2 =$ *"la chiave scelta a caso la seconda volta non apre la serratura"*, calcolare $P(H|E_1E_2)$.

   $P(H|E_1E_2) =$

4. Il diametro di un perno prodotto in serie è un n.a. X con distribuzione normale di parametri $m = 12,20$ e $\sigma = 0,02$ (in mm). Sono conformi, ovvero non sono scartati, i perni con diametro compreso tra 12,16 e 12,24. Calcolare: (i) la probabilità α che un perno sia conforme; (ii) la probabilità β che un perno abbia un diametro minore di 12,22, supposto che sia conforme. (*ricordiamo che*: $\Phi(1) = 0,841$; $\Phi(2) = 0,9772$)

   $\alpha =$ $\qquad\qquad$ $\beta =$

Probabilità e Statistica I (Ing. Civile e Trasporti, Canali I-II - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 16/6/2007.

1. Si ha

$$m = I\!\!P(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{2000} e^{-\frac{x}{2000}}\,dx = \cdots = 2000\,;$$

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\frac{x}{2000}}, & x \ge 0. \end{cases}$$

Inoltre, osservando che

$$P(E_i) = P(X_i > 1000) = \int_{1000}^{+\infty} \frac{1}{2000} e^{-\frac{x}{2000}}\,dx = \cdots = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}\,,$$

segue

$$I\!\!P(Z) = \frac{I\!\!P(|E_1|) + \cdots + I\!\!P(|E_n|)}{n} = \frac{P(E_1) + \cdots + P(E_n)}{n} = P(E_i) = \frac{1}{\sqrt{e}}\,.$$

2. L'area di T è pari a 2; pertanto $f(x,y) = \frac{1}{2}$ per $(x,y) \in T$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Allora

$$m = I\!\!P(A) = \int\int_T xyf(x,y)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} \frac{1}{2}xydy = \frac{1}{4}\int_0^2 x(2-x)^2 dx = \cdots = \frac{1}{3}\,.$$

Inoltre

$$p = P(2X + 2Y > 2) = 1 - P(X + Y \le 1) = 1 - \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{2}dy = \cdots = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\,.$$

3. Si ha

$$P(H) = \frac{\binom{1}{1}\binom{4}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{2}{5}\,, \quad P(E_1E_2|H) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\,, \quad P(E_1E_2|H^c) = 1\,;$$

quindi

$$P(H|E_1E_2) = \frac{P(E_1E_2|H)P(H)}{P(E_1E_2|H)P(H) + P(E_1E_2|H^c)P(H^c))} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5} + 1\cdot\frac{3}{5}} = \frac{1}{7}\,.$$

4. Posto $Z = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{X-12{,}20}{0{,}02}$, si ha

$$\alpha = P(12,16 < X < 12,24) = P\left(\frac{12,16 - 12,20}{0,02} < Z < \frac{12,24 - 12,20}{0,020}\right) =$$

$$= P(-2 < Z < 2) = \Phi(2) - (1 - \Phi(2)) = 2\Phi(2) - 1 \simeq 0,9544\,.$$

$$\beta = P(X < 12,22 \,|\, 12,16 < X < 12,24) = \frac{P(12,16 < X < 12,22)}{P(12,16 < X < 12,24)} =$$

$$= \frac{P(-2 < Z < 1)}{P(-2 < Z < 2)} = \frac{\Phi(1) - (1 - \Phi(2))}{2\Phi(2) - 1} = \frac{0,8182}{0,9544} \simeq 0,857293\,.$$