Probabilità e Statistica I (7/7/2007)

(Ing. Civile e Trasporti, Canali I, II - Roma)

1. I componenti prodotti da una ditta possono avere tre tipi di difetti ed il generico componente è giudicato difettoso se presenta almeno un difetto. Scelto a caso un componente, siano definiti gli eventi E_i = *"il componente presenta l'i−esimo difetto"*, $i = 1, 2, 3$. Assumendo E_1, E_2, E_3 stocasticamente indipendenti, con $P(E_1) = 0.02, P(E_2) = 0.03, P(E_3) = 0.04$, calcolare: (i) la probabilità α che il componente presenti tutti e tre i difetti; (ii) la probabilità β che il componente sia difettoso; (iii) la probabilità γ che il componente non presenti il secondo difetto, supposto che sia difettoso.

   $\alpha =$ $\beta =$ $\gamma =$

2. Dati due numeri aleatori continui X e Y, stocasticamente indipendenti e con distribuzione uniforme su $[0, 1]$, calcolare la probabilità p dell'evento $(Y - X > \frac{1}{3})$. Inoltre, calcolare la previsione m e lo scarto standard σ della media aritmetica Z di X e Y.

   $p =$ $m =$ $\sigma =$

3. Per assemblare un sistema, si prendono a caso 4 componenti da una cassa che ne contiene 10, dei quali 3 sono guasti. Il sistema funziona solo se il numero aleatorio X di componenti guasti, tra i 4 scelti a caso, non supera 2. Calcolare: (i) la probabilità p_1 che il sistema funzioni; (ii) la probabilità p_2 che il sistema funzioni, supposto che almeno uno dei 4 componenti scelti a caso sia guasto.

   $p_1 =$ $p_2 =$

4. La densità di probabilità di un numero aleatorio continuo X è $f(x) = \frac{1}{4}$ per $x \in [0, 2]$, $f(x) = \frac{2x-3}{4}$ per $x \in (2, 3]$, $f(x) = 0$ altrove. Sapendo che $P(X \leq x_0) = \frac{3}{4}$, determinare il valore x_0.

   $x_0 =$

Probabilità e Statistica I (Ing. Civile e Trasporti, Canali I-II - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 7/7/2007.

1. Si ha: $\alpha = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1)P(E_2)P(E_3) = 0,000024$; $\beta = P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) =$

   $= P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)-P(E_1)P(E_2)-P(E_1)P(E_3)-P(E_2)P(E_3)+P(E_1)P(E_2)P(E_3) =$

   $= 0,087424$;

   metodo alternativo:
   $\beta = 1-P[(E_1 \cup E_2 \cup E_3)^c] = 1-P(E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c) = 1-P(E_1^c)P(E_2^c)P(E_3^c) = \cdots = 0,087424$;

   $\gamma = P(E_2^c \,|\, E_1 \cup E_2 \cup E_3) = 1 - P(E_2 \,|\, E_1 \cup E_2 \cup E_3) =$

   $= 1 - \frac{P[E_2 \cap (E_1 \cup E_2 \cup E_3)]}{P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)} = 1 - \frac{P(E_2)}{P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)} = 1 - \frac{0,03}{0,087424} \simeq 0,65684.$

2. Si ha $f_X(t) = f_Y(t) = 1$ per $t \in [0,1]$, con $f_X(t) = f_Y(t) = 0$ per $t \notin [0,1]$; quindi $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = 1$ per $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Allora
$$p = P\left(Y - X > \frac{1}{3}\right) = \int_0^{\frac{2}{3}} dx \int_{x+\frac{1}{3}}^1 f(x,y)\, dy = \int_0^{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3} - x\right) dx = \frac{2}{9}\,.$$
   Inoltre, tenendo conto che $I\!P(X) = I\!P(Y) = \frac{1}{2}$, $Var(X) = Var(Y) = \frac{1}{12}$, $Cov(X,Y) = 0$, segue
$$I\!P(Z) = \frac{I\!P(X) + I\!P(Y)}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \sigma = \sqrt{\frac{Var(X) + Var(Y)}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\,.$$

3. Si ha $X \sim H(10, 4, \frac{3}{10})$ e quindi $P(X = k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{7}{4-k}}{\binom{10}{4}}$, $k = 0,1,2,3$; pertanto
$$p_1 = P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} \frac{\binom{3}{k}\binom{7}{4-k}}{\binom{10}{4}} = 1 - P(X = 3) = 1 - \frac{\binom{3}{3}\binom{7}{4-3}}{\binom{10}{4}} = \frac{203}{210} \simeq 0,9667\,.$$
$$p_2 = P(X \leq 2 \,|\, X \geq 1) = \frac{P(X=1) + P(X=2)}{P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)} =$$
$$= \frac{1 - P(X=0) - P(X=3)}{1 - P(X=0)} = \cdots = \frac{\binom{10}{4} - \binom{7}{4} - \binom{7}{1}}{\binom{10}{4} - \binom{7}{4}} = \frac{24}{25} = 0,96\,.$$

4. Si ha in generale $P(X \leq x) = F(x) = 0$ per $x < 0$; inoltre, per $x \in [0,2]$, risulta
$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{4}\, dx = \frac{x}{4} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\,.$$
   Per $x \in (2,3]$, si ha
$$F(x) = \int_0^2 \frac{1}{4}\, dx + \int_2^x \frac{2t-3}{4}\, dt = \frac{x^2 - 3x + 4}{4} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]\,;$$
   infine $F(x) = 1$ per $x > 3$. Pertanto $2 < x_0 < 3$, con $\frac{x_0^2 - 3x_0 + 4}{4} = \frac{3}{4}$, ovvero $x_0^2 - 3x_0 + 1 = 0$, da cui si ottiene $x_0 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.