Probabilità e Statistica I (20/9/2007)

(Ing. Civile e Trasporti, Canali I, II - Roma)

1. Date due urne, U_1 contenente due palline bianche e quattro nere e U_2 contenente quattro palline bianche e due nere, da una di esse si effettuano estrazioni con restituzione fino ad ottenere per la prima volta pallina bianca. L'urna è stata scelta in base all'esito del lancio di un dado: U_1 se è uscita la faccia 6, U_2 altrimenti. Supposto che la pallina bianca sia uscita per la prima volta alla quarta estrazione (evento A), calcolare la probabilità condizionata p che non sia uscita la faccia 6 (evento H). (*Suggerimento: utilizzare gli eventi* $E_i =$ *"la pallina nell'i−esima estrazione è nera"*, $i \geq 1$.)

   $p =$

2. In una radio ci sono quattro pile ognuna delle quali ha un tempo di vita aleatorio con densità $f(x) = 100/x^2$ se $x > 100$, con $f(x) = 0$ altrove. Si supponga che gli eventi $E_i =$ *"l'i−esima pila deve essere sostituita entro 120 ore"*, $i = 1, 2, 3, 4$, siano stocasticamente indipendenti. Calcolare la probabilità p che esattamente due delle quattro pile debbano essere sostituite entro 120 ore di attività.

   $p =$

3. In un ufficio aperto al pubblico ci sono due sportelli, in cui vengono gestiti due differenti tipi di pratiche. Siano X e Y i numeri aleatori di clienti che si presentano in un fissato intervallo di tempo ai due sportelli. Assumendo X, Y stocasticamente indipendenti e con distribuzione di Poisson di parametri $\lambda_X = 2, \lambda_Y = 4$, determinare la previsione m e la varianza σ^2 di X condizionate all'ipotesi che sia vero l'evento $(X + Y = 10)$. (*N.B.: facciamo notare che un numero aleatorio, somma di numeri aleatori indipendenti e con distribuzioni di Poisson, ha ancora una distribuzione di Poisson con parametro la somma dei parametri.*)

   $m =$ $\sigma^2 =$

4. Una persona, a partire da un certo istante, attende ad un capolinea di autobus due amici in viaggio su due linee differenti A e B. Siano X e Y i tempi aleatori di attesa (in un'opportuna unità di misura) fino all'arrivo dei due amici. La densità congiunta del vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = 3e^{-(x+3y)}$ per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la densità di probabilità f_Z e la previsione m dell'istante aleatorio Z in cui arriva l'ultimo dei due amici.

   $f_Z(z) =$ $m =$

Probabilità e Statistica I (Ing. Civile e Trasporti, Canali I-II - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 20/9/2007.

1. Si ha $A = E_1E_2E_3E_4^c$; inoltre, essendo le estrazioni con restituzione, gli eventi $\{E_i\,,\, i \geq 1\}$ sono stocasticamente indipendenti e si ha

$$p = P(H\,|\,A) = P(H\,|\,E_1E_2E_3E_4^c) = \frac{P(E_1E_2E_3E_4^c\,|\,H)P(H)}{P(E_1E_2E_3E_4^c)}\,,$$

con

$$P(E_1E_2E_3E_4^c) = P(E_1E_2E_3E_4^c\,|\,H)P(H) + P(E_1E_2E_3E_4^c\,|\,H^c)P(H^c) =$$
$$= \left(\frac{2}{6}\right)^3 \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{6} + \left(\frac{4}{6}\right)^3 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6}\,.$$

Dunque: $p = \frac{5}{9}$.

2. Per ogni i si ha $P(E_i) = \int_{100}^{120} f(x)\,dx = ... = \frac{1}{6}$. Inoltre, per ogni $\{i_1, i_2\} \subset \{1,2,3,4\}$ si ha

$$P(E_{i_1}^cE_{i_2}^cE_{i_3}E_{i_4}) = P(E_1^cE_2^cE_3E_4) = P(E_1^c)P(E_2^c)P(E_3)P(E_4) = \left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2.$$

Pertanto

$$p = P\left(\bigcup_{\{i_1,i_2\}\subset\{1,2,3,4\}} P(E_{i_1}^cE_{i_2}^cE_{i_3}E_{i_4})\right) = \sum_{\{i_1,i_2\}\subset\{1,2,3,4\}} P(E_{i_1}^cE_{i_2}^cE_{i_3}E_{i_4}) =$$
$$= \binom{4}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{25}{216}\,.$$

3. Si ha $X \in \{0, 1, \ldots, 10\}$, con

$$P(X = h\,|\,X + Y = 10) = \frac{P(X = h, X + Y = 10)}{P(X + Y = 10)} = \frac{P(X = h, Y = 10 - h)}{P(X + Y = 10)} =$$

$$= \frac{P(X = h)P(Y = 10 - h)}{P(X + Y = 10)} = \frac{\frac{2^h}{h!}\,e^{-2}\,\frac{4^{10-h}}{(10-h)!}\,e^{-4}}{\frac{6^{10}}{10!}\,e^{-6}} = \binom{10}{h}\left(\frac{1}{3}\right)^h\left(\frac{2}{3}\right)^{10-h}\,, \quad h = 0, 1, \ldots, 10\,.$$

Pertanto, la distribuzione di probabilità di X condizionata all'evento $(X + Y = 10)$ è una binomiale di parametri $n = 10, p = \frac{1}{3}$; allora

$$m = \mathbb{P}[X\,|\,(X + Y = 10)] = 10 \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3}\,; \quad \sigma^2 = Var[X\,|\,(X + Y = 10)] = 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{9}\,.$$

4. Si ha $Z = max\,\{X, Y\}$; pertanto indicando con F_Z la funzione di ripartizione di Z, si ha

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X \leq z, Y \leq z) = \int_0^z dx \int_0^z 3e^{-(x+3y)} dy = \int_0^z e^{-x}[-e^{-3y}]_0^z dx =$$

$$= \int_0^z e^{-x}(1 - e^{-3z}) dx = (1 - e^{-z})(1 - e^{-3z}) = 1 - e^{-z} - e^{-3z} + e^{-4z}\,, \quad z \geq 0\,,$$

con $F_Z(z) = 0$ altrove. Allora

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = e^{-z} + 3e^{-3z} - 4e^{-4z}\,, \quad z \geq 0\,,$$

con $f_Z(z) = 0$ altrove; ovvero, f_Z è una combinazione lineare, con coefficienti $1, 1, -1$, di tre densità esponenziali di parametri rispettivi $1, 3, 4$. Inoltre, sfruttando tale combinazione lineare, si ottiene

$$I\!P(Z) = \int_0^{+\infty} z(e^{-z} + 3e^{-3z} - 4e^{-4z}) dz = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{13}{12}\,.$$