Probabilità e Statistica I (19/1/2008)

(Ing. Civile, canali I,II - Ing. dei Trasporti - Roma)

1. Da un lotto contenente 5 pezzi (2 difettosi e 3 buoni) si effettuano 3 estrazioni senza restituzione. Definiti gli eventi $E_i =$ *"l'i-mo pezzo estratto è difettoso"*, $i = 1, 2, 3$, calcolare la probabilità (condizionata) α che nelle prime due estrazioni i pezzi siano entrambi buoni, supposto che almeno uno dei tre pezzi estratti sia difettoso.

$$\alpha =$$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, determinare la funzione di ripartizione del numero aleatorio X di pezzi difettosi fra i 3 estratti.

$$F(x) = \begin{cases} & , \\ & , \\ & , \\ & , \end{cases}$$

3. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = e^{-3x-\frac{1}{3}y}$, per $x \geq 0$, $y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti.

X, Y *stoc. indip.* ?

4. Con riferimento all'esercizio precedente, posto $U = 2X - Y$, $V = X - 2Y$, calcolare la covarianza di U, V.

$$Cov(U, V) =$$

Probabilità e Statistica I (Ing. Civile e Trasporti - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 19/1/2008.

1. Si ha

$$\alpha = P(E_1^c E_2^c \,|\, E_1 \vee E_2 \vee E_3) = \frac{P[E_1^c E_2^c \wedge (E_1 \vee E_2 \vee E_3)]}{P(E_1 \vee E_2 \vee E_3)} =$$
$$= \frac{P(E_1^c E_2^c E_3)}{1 - P(E_1^c E_2^c E_3^c)} = \cdots = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3}}{1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2}{9}\,.$$

2. Si ha $X = |E_1| + |E_2| + |E_3| \in \{0, 1, 2\}$; inoltre, X ha una distribuzione ipergeometrica di parametri $N = 5, n = 3, p = \frac{2}{5}$. Allora, applicando la formula $P(X = h) = \frac{\binom{pN}{h}\binom{qN}{n-h}}{\binom{N}{n}}$, si ottiene

$$P(X=0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{3}{3}}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{10}\,, \quad P(X=1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{\binom{5}{3}} = \frac{6}{10}\,, \quad P(X=2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{10}\,.$$

Pertanto: $F(x) = 0$, per $x < 0$, $F(x) = \frac{1}{10}$, per $0 \leq x < 1$, $F(x) = \frac{7}{10}$, per $1 \leq x < 2$, $F(x) = 1$, per $x \geq 2$.

3. Si ha

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^{+\infty} e^{-3x - \frac{1}{3}y}\,dy = 3e^{-3x} \int_0^{+\infty} \frac{1}{3}\,e^{-\frac{1}{3}y}\,dy = 3e^{-3x}\,,\ x \geq 0\,;$$
$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-3x - \frac{1}{3}y}\,dx = \frac{1}{3}\,e^{-\frac{1}{3}y} \int_0^{+\infty} 3e^{-3x}\,dx = \frac{1}{3}\,e^{-\frac{1}{3}y}\,,\ y \geq 0\,.$$

Inoltre: $f_1(x) = 0$, per $x < 0$; $f_2(y) = 0$, per $y < 0$. Allora: $f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$, per ogni (x,y); pertanto X e Y sono stocasticamente indipendenti.

4. Si ha $X \sim Exp(3)$, $Y \sim Exp(\frac{1}{3})$; inoltre $Cov(X,Y) = 0$. Pertanto

$$Cov(U,V) = Cov(2X - Y, X - 2Y) = \mathbb{P}[(2X - Y)(X - 2Y)] - \mathbb{P}(2X - Y)\mathbb{P}(X - 2Y) =$$
$$= \mathbb{P}(2X^2 - 5XY + 2Y^2) - [2\mathbb{P}(X) - \mathbb{P}(Y)][\mathbb{P}(X) - 2\mathbb{P}(Y)] =$$
$$= 2\mathbb{P}(X^2) - 5\mathbb{P}(XY) + 2\mathbb{P}(Y^2) - 2[\mathbb{P}(X)]^2 + 5\mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y) - 2[\mathbb{P}(Y)]^2 =$$
$$= 2Var(X) - 5Cov(X,Y) + 2Var(Y) = 2\left(\frac{1}{\lambda_X^2} + \frac{1}{\lambda_Y^2}\right) = 2\left(\frac{1}{9} + 9\right) = \frac{164}{9}\,.$$

Metodo alternativo:

$$Cov(U,V) = Cov(2X - Y, X - 2Y) = 2Cov(X,X) - 4Cov(X,Y) - Cov(Y,X) + 2Cov(Y,Y) =$$
$$= 2Var(X) + 2Var(Y) = \cdots = \frac{164}{9}\,.$$