Probabilità e Statistica I (16/2/2008)

(Ing. Civile, canali I,II - Ing. dei Trasporti - Roma)

1. Un'industria aeronautica fabbrica aerei di tipo A (a 4 motori) e di tipo B (a 2 motori). Ogni aereo rimane in volo se funziona almeno la metà dei suoi motori. Ciascun motore, indipendentemente dagli altri, funziona correttamente con probabilità p. Sia α (rispettivamente, β) la probabilità che un aereo di tipo A (rispettivamente, B) rimanga in volo. Calcolare per quali valori di p risulta $\alpha \geq \beta$. (*nota: indicare con X (risp., Y) il numero aleatorio di motori funzionanti in un aereo di tipo A* (risp., B)).

   $p \geq$

2. Su un tratto stradale, sul quale transitano autocarri con peso e carico variabili, c'è un ponte con divieto di transito quando il totale fra peso e carico supera 3 tonnellate. Indicando rispettivamente con X ed Y il peso e il carico aleatori (in tonnellate) di un autocarro che percorre tale tratto, si assuma $1 \leq X \leq 2$, $Y \leq 2X$. Si supponga inoltre che il vettore aleatorio (X, Y) abbia una distribuzione di probabilità uniforme. Calcolare la probabilità γ che l'autocarro possa transitare sul ponte.

   $\gamma =$

3. Dato un numero aleatorio Z, con distribuzione normale standard, sia $X = 2 - 4Z$. Calcolare: (i) la deviazione standard di X; (ii) la funzione di ripartizione $F(x)$ di X; (iii) la probabilità condizionata $p = P(X < 2 \,|\, X < 5)$.

   $\sigma_X =$ $\qquad$ $F(x) =$ $\qquad$ $p =$

4. Sia (X, Y) un vettore aleatorio discreto, con distribuzione uniforme sull'insieme di punti $\mathcal{C} = \{(0,0), (1,0), (1,1), (0,1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$. Calcolare: (i) $P(X < 1)$, $P(X - Y < 1/2)$; (ii) $Cov(X, Y)$; (iii) $Var(2X - Y)$.

   $P(X < 1) =$ $\qquad$ $P(X - Y < 1/2) =$ $\qquad$ $Cov(X, Y) =$ $\qquad$ $Var(2X - Y) =$

Probabilità e Statistica I (Ing. Civile e Trasporti - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 16/2/2008.

1. X ha una distribuzione binomiale di parametri $n = 4, p$; Y ha una distribuzione binomiale di parametri $n = 2, p$. Allora, posto $q = 1 - p$, si ha

$$\alpha = P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - q^4 - 4pq^3\,;$$

$$\beta = P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - q^2\,.$$

Pertanto

$$\alpha - \beta = q^2 - q^4 - 4(1-q)q^3 = q^2 - 4q^3 + 3q^4 \,\geq\, 0 \iff 3q^2 - 4q + 1 \geq 0 \iff q \leq \frac{1}{3}\,.$$

In definitiva: $\alpha \geq \beta \iff p \geq \frac{2}{3}$.

2. L'insieme dei punti possibili è il trapezio rettangolo T, di area 3, avente i vertici nei punti $(1,0),(2,0),(2,4),(1,2)$. Quindi $f(x,y) = \frac{1}{3}$ per $(x,y) \in T$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Il transito è permesso se risulta $X + Y \leq 3$; ovvero se $(X,Y) \in A$, essendo A il quadrilatero di vertici i punti $(1,0),(2,0),(2,1),(1,2)$ (il punto $(2,1)$ è l'intersezione delle rette $y = 3 - x,\ x = 2$). Pertanto, si ha

$$\gamma = P(X + Y \leq 3) = \int\int_A f(x,y)dxdy = \int_1^2 dx \int_0^{3-x} \frac{1}{3}\,dy = \frac{\mu(A)}{\mu(T)} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}\,.$$

3. Essendo $\sigma_Z = 1$, si ha $\sigma_X = |-4|\sigma_Z = 4$. Inoltre, osservando che

$$P(Z \geq z) = P(Z > z) = 1 - P(Z \leq z) = 1 - \Phi(z) = \Phi(-z) = P(Z \leq -z)\,,$$

segue (per $z = \frac{2-x}{4}$)

$$F(x) = P(X \leq x) = P(2 - 4Z \leq x) = P\left(Z \geq \frac{2-x}{4}\right) = P\left(Z \leq \frac{x-2}{4}\right) = \Phi\left(\frac{x-2}{4}\right)\,.$$

Infine, osservando che $(X < 2) \wedge (X < 5) = (X < 2)$, si ha

$$p = P(X < 2\,|\,X < 5) = \frac{P(X < 2)}{P(X < 5)} = \frac{F(2)}{F(5)} = \frac{\Phi(\frac{2-2}{4})}{\Phi(\frac{5-2}{4})} \simeq \frac{0.5}{0.7734} \simeq 0.6465\,.$$

4. Si ha $P(X = x, Y = y) = \frac{1}{5}$, $\forall\,(x,y) \in \mathcal{C}$; quindi $X \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, $Y \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, con

$$P(X < 1) = P(X = 0) + P(X = \frac{1}{2}) = \frac{3}{5}\,; \qquad P(X - Y < 1/2) = 1 - P(X = 1, Y = 0) = \frac{4}{5}\,,$$

e con $\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = 0 \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{2}$. Inoltre $XY \in \{0, \frac{1}{4}, 1\}$, con $\mathbb{P}(XY) = = 0 \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{4}$; pertanto: $Cov(X,Y) = \mathbb{P}(XY) - \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y) = 0$. Infine,

$$Var(X) = Var(Y) = \frac{2}{5} \cdot (0 - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{5} \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^2 + \frac{2}{5} \cdot (1 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{5}\,,$$

e dalla relazione generale $Var(aX + bY) = a^2Var(X) + b^2Var(Y) + 2abCov(X,Y)$ segue $Var(2X - Y) = 4Var(X) + Var(Y) - 4Cov(X,Y) = 1$.