Probabilità e Statistica I (12/7/2008)

(Ing. Civile, canali I,II - Ing. dei Trasporti - Roma)

1. Un vettore aleatorio discreto (X, Y) è uniformemente distribuito sull'insieme di punti $\mathcal{C}$ costituito dal centro e dai vertici del quadrato $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Considerato il numero aleatorio $Z = 2X^2 - Y$, determinare: (i) il codominio C_Z di Z; (ii) la previsione m e la varianza σ^2 di Z; (iii) la probabilità condizionata $p = P(Z > 0 \,|\, Y \leq 0)$.

   $C_Z =$ $m =$ $\sigma^2 =$ $p =$

2. Dati due numeri aleatori X, Y, stocasticamente indipendenti e con distribuzione normale standard, per ogni coppia di numeri reali (a, b), non entrambi nulli, il numero aleatorio $Z = aX + bY$ ha una distribuzione normale. Assumendo $a > 0$ e posto $r = \frac{b}{a}$, stabilire per quali valori di r il coefficiente di correlazione ρ_{XZ} di X, Z risulta maggiore di $\frac{1}{2}$.

   $r \in$

3. Da un'urna, contenente 3 palline bianche e 3 nere, vengono effettuate 2 estrazioni con restituzione. Considerati gli eventi $A =$ *"nella prima estrazione esce pallina bianca"*, $B =$ *"nella seconda estrazione esce pallina bianca"*, $C =$ *"le due palline estratte hanno lo stesso colore"*, verificare se: (i) A, B, C sono a due a due indipendenti; (ii) A, B, C sono indipendenti.

   Indipendenti a due a due? Indipendenti?

4. Un sistema S è costituito da due dispositivi in parallelo d_1 e d_2, con d_2 che entra in funzione nell'istante in cui si guasta d_1. I tempi aleatori di durata dei due dispositivi sono due numeri aleatori X e Y, stocasticamente indipendenti e con uguale distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$. Fissati due valori t e τ, con $\tau > t > 0$, calcolare la probabilità p che il dispositivo d_1 si guasti dopo l'istante t, supposto che S si guasti dopo l'istante τ.

   $p =$

Probabilità e Statistica I (Ing. Civile e Trasporti - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 12/7/2008.

1. Si ha $\mathcal{C} = \{(0,0), (-1,-1), (-1,1), (1,-1), (1,1)\}$; quindi $C_Z = \{0,1,3\}$, con $P(Z=0) = \frac{1}{5}$, $P(Z=1) = P(Z=3) = \frac{2}{5}$. Pertanto

$$m = 0 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{5}\,; \quad I\!P(Z^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{5} + 1^2 \cdot \frac{2}{5} + 3^2 \cdot \frac{2}{5} = 4\,; \quad \sigma^2 = 4 - \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{36}{25}\,.$$

Inoltre, posto $P(X=x, Y=y) = p(x,y)$, si ha

$$p = P(Z > 0 \,|\, Y \le 0) = \frac{p(-1,-1) + p(1,-1)}{p(0,0) + p(-1,-1) + p(1,-1)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}\,.$$

2. Si ha: $I\!P(X) = I\!P(Y) = 0$, $\sigma_X = \sigma_Y = 1$, $Cov(X,Y) = 0$; allora $Z \sim N_{m_Z,\sigma_Z}$, con

$$m_Z = I\!P(Z) = I\!P(aX+bY) = aI\!P(X) + bI\!P(Y) = 0\,, \quad \sigma_Z^2 = Var(Z) = a^2Var(X) + b^2Var(Y) = a^2+b^2\,.$$

Quindi, tenendo conto che $a > 0$, risulta

$$\rho_{XZ} = \frac{Cov(X,Z)}{\sigma_X\sigma_Z} = \frac{Cov(X, aX+bY)}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{aCov(X,X) + bCov(X,Y)}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\,;$$

pertanto: $\rho_{XZ} > \frac{1}{2} \iff r \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$; ovvero: $b \in (-\sqrt{3}a, \sqrt{3}a)$.

3. Si ha: $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, $P(C) = P(AB) + P(A^cB^c) = \frac{1}{2}$, con $P(AB) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$; inoltre: $P(AC) = P(AB) = \frac{1}{4} = P(A)P(C)$, $P(BC) = P(AB) = \frac{1}{4} = P(B)P(C)$. Pertanto, A, B, C sono a due a due indipendenti. D'altra parte $ABC = AB$ e quindi $P(ABC) = P(AB) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$; pertanto, A, B, C non sono indipendenti.

4. Si ha

$$P(X+Y > \tau) = 1 - P(X+Y \le \tau) = 1 - \int_0^\tau dx \int_0^{\tau - x} e^{-x-y} dy =$$

$$= 1 - \int_0^\tau e^{-x}\,(1 - e^{-\tau+x}) dx = 1 - \int_0^\tau e^{-x}\,dx + e^{-\tau} \int_0^\tau dx = 1 - (1 - e^{-\tau}) + \tau e^{-\tau} = (1+\tau)e^{-\tau}\,.$$

Inoltre, ricordando che per ogni coppia di eventi A, B si ha $P(AB) = P(A) - P(AB^c)$, risulta

$$P(X > t, X+Y > \tau) = P(X > t) - P(X > t, X+Y \le \tau) = e^{-t} - \int_t^\tau dx \int_0^{\tau-x} e^{-x-y} dy =$$

$$= e^{-t} - \int_t^\tau e^{-x}\,(1 - e^{-\tau+x}) dx = e^{-t} - \int_t^\tau e^{-x} dx + e^{-\tau} \int_t^\tau dx = \cdots = (1 + \tau - t)e^{-\tau}\,.$$

Allora

$$p = P(X > t \,|\, X+Y > \tau) = \frac{P(X > t, X+Y > \tau)}{P(X+Y > \tau)} = \frac{(1+\tau-t)e^{-\tau}}{(1+\tau)e^{-\tau}} = \frac{1+\tau-t}{1+\tau}\,.$$

Nota: in particolare, per $\tau = t$, si ha: $p = P(X > t \,|\, X+Y > t) = \frac{1}{1+t}$.