Probabilità e Statistica I (13/9/2008)

(Ing. Civile, canali I,II - Ing. dei Trasporti - Roma)

1. Un v. a. discreto (X, Y) ha come codominio l'insieme $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,0)\}$, con $P(X=2, Y=0)=\frac{1}{2}$ e con $P(X=x, Y=y)=a$ per ogni $(x,y)\neq(2,0)$. Calcolare la costante a e stabilire se i numeri aleatori X e Y sono stocasticamente indipendenti.

   $a =$ *Stocast. indip.* ?

2. Sia R il rettangolo $[0,1]\times[0,2]$. La densità congiunta di un v. a. continuo (X, Y) è $f(x,y)=kxy\,,\ (x,y)\in R$, con $f(x,y)=0$ altrove. Calcolare: (i) la costante k; (ii) la probabilità p dell'evento condizionato $(Y-X\leq 1)\,|\,(X+Y>1)$.

   $k =$ $p =$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, posto $U=X+Y$, $V=Y-X$, calcolare la covarianza dei numeri aleatori U e V.

   $\sigma_{UV} =$

4. Da due lotti A e B, costituiti ciascuno da 3 pezzi buoni e 1 difettoso, si prelevano a caso 2 pezzi formando un terzo lotto C di 4 pezzi. Calcolare: (i) la probabilità α che i 4 pezzi di C siano tutti buoni; (ii) la probabilità condizionata β che i 4 pezzi di C siano tutti buoni, supposto che i 2 pezzi prelevati da A e inseriti in C siano entrambi buoni; (iii) la probabilità condizionata γ che i 4 pezzi di C siano tutti buoni, supposto che due pezzi prelevati a caso da C siano risultati entrambi buoni (evento E).
   (*N.B.: indicare con X (risp. Y) il numero di pezzi difettosi prelevati da A (risp., da B); indicare inoltre con H_r l'evento* $(X+Y=r)$, $r=0,1,2$).

   $\alpha =$ $\beta =$ $\gamma =$

Probabilità e Statistica I (Ing. Civile e Trasporti - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 13/9/2008.

1. Imponendo la condizione: $4a + \frac{1}{2} = 1$, si ottiene: $a = \frac{1}{8}$. Inoltre: $X \in \{0,1,2\},\ Y \in \{0,1\}$, con
$$P(X=0) = P(X=1) = \frac{1}{4},\ P(X=2) = \frac{1}{2}; \quad P(Y=0) = \frac{3}{4},\ P(Y=1) = \frac{1}{4}\,.$$
Allora, osservando ad esempio che: $P(X=2, Y=0) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = P(X=2)P(Y=0)$, risulta che X e Y non sono stocasticamente indipendenti.

2. Si ha
$$\int_0^1 \int_0^2 f(x,y)dxdy = 1 = k \int_0^1 \int_0^2 xydxdy = k \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 dx = k \int_0^1 2x\,dx = k[x^2]_0^1 = k\,;$$
quindi: $k = 1$. Inoltre: $p = P[(Y - X \leq 1)\,|\,(X + Y > 1)] = \frac{P(Y-X\leq 1,\, X+Y>1)}{P(X+Y>1)}$, con
$$P(X+Y>1) = \int_0^1 dx \int_{1-x}^2 xy\,dy = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{1-x}^2 dx = \int_0^1 x \left[2 - \frac{(1-x)^2}{2}\right] dx =$$
$$= \cdots = \left[\frac{3}{4}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 - \frac{1}{8}\,x^4\right]_0^1 = \frac{23}{24}\,;$$
$$P(Y - X \leq 1,\, X+Y>1) = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{x+1} xy\,dy = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{1-x}^{x+1} dx = \cdots = \int_0^1 2x^2\,dx = \frac{2}{3}\,.$$
Pertanto: $p = P[(Y - X \leq 1)\,|\,(X+Y>1)] = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{23}{24}} = \frac{16}{23}$.

3. Si ha
$$\sigma_{UV} = \mathbb{P}(UV) - \mathbb{P}(U)\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(Y^2 - X^2) - [\mathbb{P}(X) + \mathbb{P}(Y)][\mathbb{P}(Y) - \mathbb{P}(X)] =$$
$$= \mathbb{P}(Y^2) - \mathbb{P}(X^2) + [\mathbb{P}(X)]^2 - [\mathbb{P}(Y)]^2 \ \ (= \sigma_Y^2 - \sigma_X^2)\,,$$
con
$$\mathbb{P}(X) = \int_0^1 xf_1(x)dx = \int_0^1 \int_0^2 xf(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^2 x^2ydxdy = \cdots = \frac{2}{3}\,,$$
$$\mathbb{P}(X^2) = \int_0^1 x^2 f_1(x)dx = \int_0^1 \int_0^2 x^2 f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^2 x^3ydxdy = \cdots = \frac{1}{2}\,,$$
$$\mathbb{P}(Y) = \int_0^2 yf_2(y)dy = \int_0^1 \int_0^2 yf(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^2 xy^2dxdy = \cdots = \frac{4}{3}\,,$$
$$\mathbb{P}(Y^2) = \int_0^2 y^2 f_2(y)dy = \int_0^1 \int_0^2 y^2 f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^2 xy^3dxdy = \cdots = 2\,.$$
Pertanto: $\sigma_{UV} = 2 - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{16}{9} = \frac{1}{6}$.

4. Si ha

$$\alpha = P(H_0) = P(X+Y=0) = P(X=0)P(Y=0) = \frac{\binom{3}{2}\binom{1}{0}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{\binom{3}{2}\binom{1}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\,.$$

$$\beta = P[(X+Y=0)\,|\,(X=0)] = \cdots = P[(Y=0)\,|\,(X=0)] = P(Y=0) = \frac{\binom{3}{2}\binom{1}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2}\,.$$

Inoltre

$$\gamma = P[(X+Y=0)\,|\,E] = P(H_0\,|\,E) = \frac{P(E\,|\,H_0)P(H_0)}{P(E\,|\,H_0)P(H_0) + P(E\,|\,H_1)P(H_1) + P(E\,|\,H_2)P(H_2)}\,,$$

con

$$P(H_2) = P(X+Y=2) = P(X=1)P(Y=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\,,$$

$$P(H_1) = P(X+Y=1) = P(X=0)P(Y=1) + P(X=1)P(Y=0) = 1 - P(H_0) - P(H_2) = \frac{1}{2}\,;$$

$$P(E\,|\,H_0) = 1\,,\ P(E\,|\,H_1) = \frac{\binom{3}{2}\binom{1}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2}\,,\ P(E\,|\,H_2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{2}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}\,.$$

Pertanto: $\gamma = \frac{1 \cdot \frac{1}{4}}{1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{6}{13}$.