Nome e Cognome : ______________________ *Num. Matr. :* ____________

Probabilità e Statistica I (10/1/2009)

(Ing. Civile, canali I,II - Ing. dei Trasporti - Roma)

1. Fra 140 componenti dello stesso tipo, utili per l'assemblaggio di un dispositivo, soltanto 80 sono realmente buoni. Calcolare: (*i*) la probabilità α che a seguito di un collaudo approfondito compiuto su 5 dei 140 componenti soltanto due di essi risultino realmente buoni; (*ii*) la previsione m del numero aleatorio X di componenti buoni osservati nei 5 collaudi.

   $\alpha =$ $m =$

2. La razione di caffè erogata da un distributore automatico ha un peso aleatorio X (in grammi) con distribuzione di probabilità normale, con $\sigma = 1,2$. Valutando che il $20,05\%$ delle razioni contiene non meno di 28 grammi di caffè, calcolare il peso medio μ delle razioni erogate dal distributore. Il guadagno è nullo quando la quantità erogata supera di 3σ il peso medio; qual'è la probabilità p di tale evento?
   (*Nota:* $\Phi(0,84) \simeq 0,7995$; $\Phi(3) \simeq 0,9987$)

   $\mu =$ $p =$

3. Stabilire per quale valore di a la funzione $f(x) = 0$ per $x < 0$, $f(x) = x/a^2$, per $x \in [0, a]$, $f(x) = 1/x^2$, per $x > a$, è una densità di probabilità. Determinare inoltre la funzione di ripartizione di X e la probabilità $p = P(\frac{1}{3} < X < 3)$.

   $a =$ $F(x) = \begin{cases} & , \\ & , \\ & , \end{cases}$ $p =$

4. I tempi aleatori impiegati da due veicoli per percorrere un tratto di strada sono rispettivamente X e Y. La densità congiunta del vettore (X, Y) è $f(x, y) = ax + y$, per $(x, y) \in [1, 2] \times [1, 2]$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare il valore di a, verificando che la condizione $f(x, y) \geq 0$ è soddisfatta in ogni punto (x, y). Inoltre, stabilire quale dei due eventi $(X \leq Y)$, $(X > Y)$ è quello più probabile.

   $a =$ *evento più probabile :*

Probabilità e Statistica I (Ing. Civile e Trasporti - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 10/1/2009.

1. Si ha $X \sim \mathbf{H}(N,n,p)$, con $N=140$, $n=5$, $p=\frac{80}{140}=\frac{4}{7}$, $X \in \{0,1,2,3,4,5\}$. Pertanto
$$\alpha = P(X=2) = \frac{\binom{80}{2}\binom{60}{3}}{\binom{140}{5}} \simeq 0,2593\,; \quad m = \mathbb{P}(X) = np = \frac{20}{7} \simeq 2,857.$$

2. Per ipotesi $X \sim N_{\mu;1,2}$, con $P(X \geq 28) = 0,2005$. Considerando il n.a. standardizzato $Z = \frac{X-\mu}{1,2}$, si ha
$$P(X \geq 28) = P\left(\frac{X-\mu}{1,2} \geq \frac{28-\mu}{1,2}\right) = P\left(Z \geq \frac{28-\mu}{1,2}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{28-\mu}{1,2}\right) = 0,2005\,;$$
ovvero: $\Phi\left(\frac{28-\mu}{1,2}\right) = 0,7995$ e quindi $\frac{28-\mu}{1,2} = 0,84$, da cui segue: $\mu = 26,992$.
Inoltre, $\mu + 3\sigma = 30,592$; pertanto
$$p = P(X \geq 30,592) = P(Z \geq \frac{30,592-\mu}{\sigma}) = P(Z \geq 3) = 1 - \Phi(3) = 0,0013 = 0,13\%.$$

3. Dev'essere $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, ovvero
$$\int_0^a \frac{x}{a^2}\,dx + \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{a} = 1\,,$$
pertanto: $a=2$. Allora, $F(x)=0$ per $x<0$; $F(x) = \int_0^x \frac{t}{4}\,dt = \frac{x^2}{8}$, per $x \in [0,2]$; inoltre, per $x>2$ si ha
$$F(x) = \int_0^2 \frac{t}{4}\,dt + \int_2^x \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{x}\,.$$
Infine
$$p = P(\frac{1}{3} < X < 3) = \int_{\frac{1}{3}}^3 f(x)\,dx = F(3) - F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{72} = \frac{47}{72} \simeq 0.6528\,.$$

4. Si ha
$$\int_1^2 dx \int_1^2 (ax+y)dy = \int_1^2 \left(ax + \frac{3}{2}\right)dx = \frac{3}{2}\,a + \frac{3}{2} = 1\,,$$
da cui segue: $a = -\frac{1}{3}$. Quindi, f è decrescente rispetto ad x e crescente rispetto ad y, con
$$f(x,y) = -\frac{x}{3} + y \;\geq\; f(2,1) = \frac{1}{3}\,, \quad \forall\,(x,y) \in [1,2]\times[1,2]\,;$$
pertanto: $f(x,y) \geq 0$, per ogni (x,y). Infine
$$P(X \leq Y) = \int_1^2 dx \int_x^2 \left(-\frac{x}{3} + y\right)dy = \cdots = \int_1^2 \left(-\frac{x^2}{6} - \frac{2x}{3} + 2\right)dx = \cdots = \frac{11}{18}\,,$$
e quindi: $P(X > Y) = 1 - P(X \leq Y) = \frac{7}{18}$. Pertanto $(X \leq Y)$ è l'evento più probabile.